Vrije Universiteit Amsterdam
Opleiding Wiskunde - Bachelorscriptie

Vernieuwingsrijen

Arno E. Weber

studentnummer: 1275437
email: *aeweber@cs.vu.nl*

augustus 2004

Inhoudsopgave

Voorwoord

Mijn bachelorscriptie heeft als onderwerp *vernieuwingsrijen*. Dit zijn getallenrijen in $[0, 1]$, doorgaans genoteerd door $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, die voortkomen uit een probabilistische context, in de zin dat u_n gezien kan worden als de kans dat op tijdstip n een zeker onderdeel in een machine defect raakt en vervangen wordt door een soortgelijk onderdeel. Hierbij is aangenomen dat de levensduren van al deze onderdelen onafhankelijk zijn en dezelfde (mogelijk defectieve) kansverdeling f bezitten, en dat op tijdstip $n = 0$ juist een nieuw onderdeel is ingeschakeld (zodat $u_0 = 1$). Dit proces, waaruit vernieuwingsrijen voortkomen, zullen we een *vernieuwingsproces* noemen. Het doel in deze scriptie is het vinden van eigenschappen van vernieuwingsrijen. Met name de vraag welke getallenrijen vernieuwingsrijen zijn, komt uitgebreid aan de orde. Ook zullen we een aantal bewerkingen op bestaande vernieuwingsrijen beschouwen die nieuwe vernieuwingsrijen opleveren.

In paragraaf 1 voeren we notaties in en definiëren we vernieuwingsrijen vanuit de context van het vernieuwingsproces. Vervolgens bewijzen we in paragraaf 2 een belangrijke karakterisering van vernieuwingsrijen, die ons in staat stelt de kanstheoretische achtergrond van het geheel los te laten en (waar nodig) in een meer analytische context vernieuwingsrijen te bestuderen. Deze karakterisering levert ons meteen een groot aantal eigenschappen van vernieuwingsrijen op. In paragraaf 3 tonen we een verband met Markov-ketens aan, waarmee we onder andere in paragraaf 4 de belangrijkste limietstelling uit de vernieuwingstheorie, de *elementaire vernieuwingsstelling*, kunnen bewijzen. Uiteraard is er aandacht voor toepassingen van deze stelling; bijvoorbeeld in paragraaf 5, waar we een zeer opmerkelijk vernieuwingsproces, genaamd het *binomiaal-proces*, bekijken. In de paragrafen 6, 7 en 8 bestuderen we een drietal eigenschappen van (vernieuwings)rijen, namelijk *log-convexiteit*, *oneindige deelbaarheid* en *Hausdorff*, waarvan de achterliggende theorie ons nieuwe informatie over vernieuwingsrijen oplevert. In de afsluitende paragraaf 9 worden nog enkele suggesties voor verdere studie gedaan.

De tekst van deze scriptie is hier en daar voorzien van concrete voorbeelden. Achterin is een lijst opgenomen van de literatuur waarvan ik gebruik gemaakt heb; naar deze lijst wordt af en toe verwezen in de tekst. Verder veronderstel ik bij de lezer kennis van de (maattheoretische) kansrekening, waaronder met name de theorie van Markov-ketens, zoals behandeld in bijvoorbeeld [3] uit de literatuurlijst. Tot slot wil ik mijn begeleider, de heer K. van Harn, bedanken voor al zijn hulp en aanwijzingen.

Amsterdam, 23 augustus 2004

1 Inleiding

In de *(discrete) vernieuwingstheorie* modelleren we verschijnselen waarbij op bepaalde (stochastische) tijdstippen $n \in \mathbb{Z}_+$ een zeker incident gebeurt. Men kan hierbij denken aan het arriveren van klanten in een winkel, het uitbarsten van een vulkaan, of het uitzenden van straling door radioactief materiaal. Een andere interpretatie, die beter aansluit op de door ons gebruikte terminologie, is de volgende. Stel dat een zeker onderdeel in een machine steeds vervangen wordt door een soortgelijk onderdeel zodra het defect raakt. We kijken dan onder meer naar de tijdstippen waarop de vervangingen (ofwel *vernieuwingen*) plaatsvinden en naar de *levensduren* van de achtereenvolgens ingeschakelde onderdelen. De de tijd wordt gemeten in bijvoorbeeld minuten, uren of dagen, zodat deze grootheden geheelwaardig zijn. We zullen deze interpretatie in gedachten houden bij het behandelen van de theorie.

Veronderstel dat de (opeenvolgende) levensduren onafhankelijke, gelijkverdeelde stochastische variabelen $T_1, T_2, T_3, \ldots$ zijn, op een zekere kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, met waarden in $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ en met verdeling gegeven door de rij $f := (f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ met $f_0 = 0$, dus $f_n = \mathbb{P}(T_i = n)$ voor $n \in \mathbb{Z}_+$. We laten toe dat f *defectief* is; dat wil zeggen dat f een positief *defect* d_f heeft. Hierbij is

$$d_f := \mathbb{P}(T_i = \infty) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

De *verwachting* μ_f bij de levensduurverdeling f wordt gegeven door:

$$\mu_f = \begin{cases} \infty, & \text{als } d_f > 0; \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n f_n = F'(1) \ (\leq \infty), & \text{als } d_f = 0, \end{cases}$$

met F de genererende functie van f: $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, $z \in [0,1]$. Daarnaast definiëren we de *periode* p_f van f als

$$p_f := \operatorname{ggd}\{n \in \mathbb{N} : f_n > 0\},$$

waarbij $\operatorname{ggd} \emptyset := \infty$, en noemen we f *aperiodiek* als $p_f = 1$ en *periodiek* als $p_f > 1$. Een andere belangrijke grootheid bij f is het *eindpunt* r_f van f:

$$r_f := \inf \Big\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} f_k = 1 \Big\},$$

waarbij $\inf \emptyset := \infty$.

Definieer nu bij de rij $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ van levensduren de rij $(S_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ van *vernieuwingstijdstippen* door

$$S_0 :\equiv 0; \qquad S_k := T_1 + \cdots + T_k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

en het *aantal vernieuwingen N in* $\mathbb{N}$ door

$$N := \#\{k \in \mathbb{N} : S_k < \infty\}.$$

Merk op dat

$$\mathbb{P}(N = \infty) = \mathbb{P}(\forall\, i \in \mathbb{N} : T_i < \infty) = \lim_{k\to\infty} (1 - d_f)^k = \begin{cases} 0, & \text{als } d_f > 0; \\ 1, & \text{als } d_f = 0. \end{cases}$$

Hieruit kunnen we de volgende conclusies trekken:

$$\begin{array}{lcl} d_f > 0 & \Longleftrightarrow & \text{het proces telt met kans 1 slechts eindig veel vernieuwingen;} \\ d_f = 0 & \Longleftrightarrow & \text{er vinden met kans 1 oneindig veel vernieuwingen plaats.} \end{array}$$

Definieer verder het *vernieuwingsproces* $(N_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ door

$$N_0 :\equiv 0; \qquad N_n := \#\{k \in \mathbb{N} : S_k \le n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Hierbij kan N_n geïnterpreteerd worden als het *aantal vernieuwingen* in het tijdsinterval $(0, n]$. Merk op dat de volgende twee eigenschappen gelden:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(N_n \ge k) & = & \mathbb{P}(S_k \le n); \\ \mathbb{P}(N_n = k) & = & \mathbb{P}(S_k \le n, S_{k+1} > n). \end{array}$$

We zullen onder andere (het limietgedrag van) het *verwachte aantal vernieuwingen* $\mathbb{E}N_n$ op $(0, n]$ voor $n \to \infty$ onderzoeken. Omdat de vernieuwingstijdstippen van het proces niet kunnen samenvallen (immers $f_0 = 0$), zien we dat N_n voor $n \in \mathbb{N}$ geschreven kan worden als

$$N_n = \sum_{m=1}^{n} 1_{\{\exists\, k\in\mathbb{N}: S_k = m\}}, \qquad \text{dus} \qquad \mathbb{E}N_n = \sum_{m=1}^{n} u_m,$$

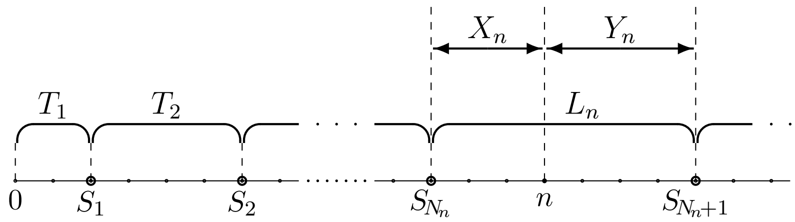
waarbij de rij $u := (u_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ als volgt gedefinieerd is:

$$u_0 := 1; \qquad u_n := \mathbb{P}(\exists\, k \in \mathbb{N} : S_k = n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dat wil zeggen: voor $n \in \mathbb{N}$ is u_n de kans dat n een vernieuwingstijdstip is. Merk op dat ook $u_n = \mathbb{P}(S_{N_n} = n)$. De rij u, die we de *vernieuwingsrij* bij het proces noemen, zal een centrale rol spelen in deze scriptie. Zo zullen we in de komende paragrafen onderzoeken welke getallenrijen vernieuwingsrijen zijn, een relatie met Markov-ketens aantonen, een belangrijke limietstelling voor vernieuwingsrijen bewijzen en daarmee de stochastische processen $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ en $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ bekijken voor $n\to\infty$, waarbij voor $n\in\mathbb{Z}_+$:

$$\begin{array}{lcll} X_n & := & n - S_{N_n}, & \text{de } \textit{verstreken levensduur} \text{ op tijdstip } n; \\ Y_n & := & S_{N_n+1} - n, & \text{de } \textit{resterende levensduur} \text{ op tijdstip } n; \\ L_n & := & X_n + Y_n, & \text{de } \textit{momentane levensduur} \text{ op tijdstip } n. \end{array}$$

Merk op dat $L_n = T_{N_n+1}$, voor $n\in\mathbb{Z}_+$. Zie ter illustratie de volgende figuur.



Tot slot bekijken we een eenvoudig voorbeeld.

Voorbeeld 1.1 Laat $f_1 = p$, $f_n = 0$ voor $n\geq 2$ en $d_f = q := 1-p$, voor zekere $p\in[0,1]$. Dan zijn alle tijdstippen vernieuwingstijdstippen tot op een zeker moment, waarna geen enkel tijdstip meer vernieuwingstijdstip is. Voor $k\in\mathbb{N}$ is het k-de vernieuwingstijdstip S_k dus eindig met kans p^k en in dat geval is $S_k = k$. Voor $n\in\mathbb{N}$ is het aantal vernieuwingen N_n in $(0,n]$ verdeeld volgens

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \begin{cases} p^k q, & \text{als } k < n; \\ p^n, & \text{als } k = n. \end{cases}$$

De vernieuwingsrij u wordt gegeven door

$$u = (1, p, p^2, p^3, \ldots).$$

Twee speciale gevallen van dit voorbeeld zijn die waarbij $p = 1$, resp. $p = 0$. We krijgen dan als vernieuwingsrij:

$$u = (1,1,1,1,\ldots), \qquad \text{resp.} \qquad u = (1,0,0,0,\ldots).$$

Omdat deze gevallen wel als 'ontaard' kunnen worden beschouwd, zullen we in het vervolg vaak stilzwijgend aannemen dat $f_1 < 1$ en $d_f < 1$. □

2 Elementaire eigenschappen

Beschouw bij een gegeven vernieuwingsproces de vernieuwingsrij $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, dus

$$u_0 = 1; \qquad u_n = \mathbb{P}(\exists\, k\in\mathbb{N} : S_k = n) = \mathbb{P}(S_{N_n} = n), \qquad n\in\mathbb{N}.$$

We zullen laten zien hoe deze rij van de levensduurverdeling f afhangt, en met behulp daarvan enkele eigenschappen van u afleiden. Noteer met U de genererende functie van de rij u. De volgende propositie geeft een belangrijke karakterisering van een vernieuwingsrij.

Propositie 2.1 *Een rij $u := (u_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ in $\mathbb{R}$ met $u_0 = 1$ is een vernieuwingsrij als en alleen als u voldoet aan de vergelijking*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

met $f := (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een kansverdeling op $\overline{\mathbb{N}}$, dat wil zeggen een rij met

$$f_k \geq 0 \quad \text{voor alle } k \in \mathbb{N}, \text{ en} \quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k \leq 1.$$

In termen van genererende functies luidt vergelijking (1):

$$U(z) = \frac{1}{1 - F(z)}, \qquad z \in [0, 1).$$

Bewijs. Veronderstel dat u een vernieuwingsrij is bij levensduurverdeling f. Onder weglating van f_0 is f een kansverdeling op $\overline{\mathbb{N}}$. Door nu uit te splitsen naar de waarden van T_1 en te gebruiken dat T_1 en $S_k - T_1$ onafhankelijk zijn en dat $S_k - T_1 \overset{\mathrm{d}}{=} S_{k-1}$ (beide voor $k \geq 2$), vinden we:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_1 = i, \exists\, k \in \mathbb{N} : S_k = n) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(T_1 = i, \exists\, k \geq 2 : S_k - T_1 = n - i) + f_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} f_i u_{n-i} + f_n = \sum_{i=1}^{n} f_i u_{n-i}. \end{aligned}$$

Omdat $u_0 = 1$ geldt dat $U(z) = 1 + F(z)U(z)$. Hiermee volgt de uitdrukking voor U. Stel nu dat (1) geldt voor zekere rij f, met eigenschappen zoals aangegeven. Dan zijn de termen van u uniek bepaald door die van f. Neem f in de vernieuwingscontext als levensduurverdeling (met daaraan toegevoegd $f_0 := 0$), dan moet u wel de vernieuwingsrij bij f zijn. $\square$

We kunnen vernieuwingsrijen dus beschouwen buiten de in paragraaf 1 beschreven probabilistische context. De vergelijking (1) noemt men de *(zuivere) vernieuwingsvergelijking.* Wegens de vertaling ervan in genererende functies wordt u volledig door f bepaald. Een uitdrukking van de u_n in de f_n vinden we als volgt. Voor $z \in [0, 1)$ geldt dat $F(z)$ waarden aanneemt in $[0, 1)$, dus

$$\begin{aligned}
U(z) &= \frac{1}{1-F(z)} = \sum_{k=0}^{\infty}(F(z))^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n_1=1}^{\infty} f_{n_1} z^{n_1}\Big)\cdots\Big(\sum_{n_k=1}^{\infty} f_{n_k} z^{n_k}\Big) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{N}} f_{n_1}\cdots f_{n_k} z^{n_1+\cdots+n_k} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{N}:\\ n_1+\cdots+n_k=n}} f_{n_1}\cdots f_{n_k}\Big) z^n.
\end{aligned}$$

Dus we vinden voor $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{N}:\\ n_1+\cdots+n_k=n}} f_{n_1}\cdots f_{n_k}.$$

Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}
u_1 &= f_1 \\
u_2 &= f_2 + f_1^2 \\
u_3 &= f_3 + 2f_1f_2 + f_1^3 \\
u_4 &= f_4 + 2f_1f_3 + f_2^2 + 3f_1^2f_2 + f_1^4.
\end{aligned}$$

Merk op dat een vernieuwingsrij een rij is in $[0,1]$. Als we nu van dergelijke rijen uitgaan, krijgen we een tweede karakterisering van een vernieuwingsrij.

Propositie 2.2 *Een rij $u := (u_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ in $[0,1]$ met $u_0 = 1$ is een vernieuwingsrij als en alleen als voor de grootheden f_k, $k \in \mathbb{N}$, bepaald door de vernieuwingsvergelijking*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

geldt:

$$f_k \geq 0 \quad \text{voor alle } k \in \mathbb{N}.$$

Bewijs. Stel dat de f_n alle niet-negatief zijn. Dan is $f_n \leq u_n$ voor alle n zodat de genererende functies F en U van f en u op $[0,1)$ gedefinieerd zijn, en er geldt:

$$U(z) = 1 + F(z)U(z) \geq F(z)U(z).$$

Er geldt dus voor alle $z \in [0,1)$: $F(z) \leq 1$. Laat $z \uparrow 1$, dan volgt met de monotone convergentiestelling:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \leq 1.$$

Op grond van de eerste karakterisering (Propositie 2.1) concluderen we dat u een vernieuwingsrij is. De omgekeerde implicatie volgt direct uit Propositie 2.1. $\square$

Een alternatieve formulering van de voorgaande propositie is de volgende. Een rij $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ in $[0,1]$ met $u_0 = 1$ en genererende functie U is een vernieuwingsrij als en alleen als de functie F, gegeven door

$$F(z) = 1 - \frac{1}{U(z)}, \qquad z \in [0,1),$$

te ontwikkelen is in een machtreeks met niet-negatieve coëfficiënten. We zien dus dat voor een vernieuwingsrij u bij levensduurverdeling f ook de rij f door u wordt bepaald. Om een uitdrukking van de f_n in de u_n te vinden, gaan we als volgt te werk. De vernieuwingsvergelijking levert voor $n \in \mathbb{N}$ het volgende stelsel:

$$\begin{cases} u_1 &= f_1 u_0 \\ u_2 &= f_1 u_1 + f_2 u_0 \\ &\vdots \\ u_n &= f_1 u_{n-1} + f_2 u_{n-2} + \cdots + f_n u_0. \end{cases}$$

In matrixvorm wordt dit

$$A_n \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

waarbij de $n \times n$ matrix A_n gegeven wordt door

$$A_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & 0 & & 0 \\ u_2 & u_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ u_{n-1} & u_{n-2} & u_{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

met determinant $\det A_n = 1$. Noteer vervolgens met A_n^* de matrix A_n, waarvan de n-de kolom vervangen is door de vector $(u_1, \ldots, u_n)$:

$$A_n^* := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_1 \\ u_1 & 1 & 0 & & 0 & u_2 \\ u_2 & u_1 & 1 & & 0 & u_3 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ u_{n-2} & u_{n-3} & u_{n-4} & & 1 & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_{n-2} & u_{n-3} & \cdots & u_1 & u_n \end{pmatrix}.$$

Met de regel van Cramer volgt dan dat f_n als volgt kan worden uitgedrukt in termen van de rij u:

$$f_n = \frac{\det A_n^*}{\det A_n} = \det A_n^*.$$

Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} f_1 &= u_1 \\ f_2 &= u_2 - u_1^2 \\ f_3 &= u_3 - 2u_1u_2 + u_1^3 \\ f_4 &= u_4 - 2u_1u_3 + 3u_1^2u_2 - u_2^2 - u_1^4. \end{aligned}$$

In de voorgaande propositie kunnen we de voorwaarde $f_k \geq 0$ voor alle k dus vervangen door $\det A_k^* \geq 0$ voor alle k; dit is een voorwaarde in termen van alleen u. Nemen we $k = 2$, dan volgt dat iedere vernieuwingsrij u noodzakelijk voldoet aan de ongelijkheid

$$u_2 \geq u_1^2.$$

Verderop in de scriptie komen we terug op dit type ongelijkheden.

Het bovenstaande stelt ons nu in staat een aantal eenvoudige eigenschappen van een vernieuwingsrij u af te leiden. Allereerst vragen we ons af of we, uit één of meerdere vernieuwingsrijen, nieuwe vernieuwingsrijen kunnen construeren. De volgende propositie geeft twee manieren waarop dit kan.

Propositie 2.3

1. *Als u een vernieuwingsrij is en $a > 0$ een getal zodat $u_n a^n \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{Z}_+$, dan is de rij $(u_n a^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ook een vernieuwingsrij.*

2. *Als $u^{(m)}$ een vernieuwingsrij is voor iedere $m \in \mathbb{N}$ zodat de getallen u_n, gedefinieerd door*

$$u_n := \lim_{m\to\infty} u_n^{(m)},$$

bestaan voor alle $n \in \mathbb{Z}_+$, dan is de rij $u := (u_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ een vernieuwingsrij.

De vernieuwingsrij u uit bewering 2 noteren we wel met $u =: \lim_{m\to\infty} u^{(m)}$.

Bewijs. We maken gebruik van de tweede karakterisering (Propositie 2.2) van een vernieuwingsrij. Laat u in $[0, 1]$ met $u_0 = 1$ en zodat de getallen f_k, $k \in \mathbb{N}$, bepaald door de vernieuwingsvergelijking, alle niet-negatief zijn. Dan is ook de rij $(u_n a^n)_n$ in $[0, 1]$, met $u_0 a^0 = 1$, en voor $n \in \mathbb{N}$ is

$$u_n a^n = \sum_{k=1}^{n} (f_k a^k)(u_{n-k} a^{n-k}),$$

zodat de vernieuwingsvergelijking voor $(u_n a^n)_n$ de levensduurverdeling $(f_k a^k)_k$ levert, met alle termen niet-negatief. Hiermee is bewering 1 aangetoond. Stel vervolgens dat voor iedere $m \in \mathbb{N}$ een rij $u^{(m)}$ in $[0,1]$ is gegeven, met $u_0^{(m)} = 1$ en waarvoor de levensduurverdeling $f^{(m)}$, bepaald door de vernieuwingsvergelijking, niet-negatieve termen heeft. Dan is ook u een rij in $[0,1]$, met $u_0 = 1$ en voor $n \in \mathbb{N}$ is

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \lim_{m\to\infty} (f_k^{(m)} u_{n-k}^{(m)}) = \sum_{k=1}^{n} (\lim_{m\to\infty} f_k^{(m)}) u_{n-k},$$

zodat de vernieuwingsvergelijking voor u de levensduurverdeling $(\lim_{m\to\infty} f_k^{(m)})_k$ levert, met alle termen niet-negatief. (Merk op dat de limiet van $f^{(m)}$ bestaat omdat die van $u^{(m)}$ bestaat.) Aldus is ook bewering 2 bewezen. □

Vervolgens bewijzen we een paar nuttige ongelijkheden.

Propositie 2.4 *Zij u een vernieuwingsrij bij levensduurverdeling f. Dan geldt:*

1. $f_n \leq u_n \leq f_1 + \cdots + f_n$, *en dus* $u_n \leq 1 - d_f$, *voor alle* $n \in \mathbb{N}$;
2. $u_{n+m} \geq u_n u_m$ *voor alle* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, *en dus* $u_n \geq u_1 u_{n-1}$ *en ook* $u_n \geq u_1^n$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs. Bewering 1 volgt uit de vernieuwingsvergelijking:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k} \begin{cases} \geq f_n u_0 = f_n; \\ \leq \sum_{k=1}^{n} f_k. \end{cases}$$

De ongelijkheid in 2 bewijzen we met inductie naar m: het geval $m = 0$ is triviaal en als $u_{n+j} \geq u_n u_j$ voor alle n en alle $j \leq m-1$, dan is

$$u_{n+m} \geq \sum_{k=1}^{m} f_k u_{n+m-k} \geq \sum_{k=1}^{m} f_k u_n u_{m-k} = u_n u_m.$$

□

Noteer voor een rij $a := (a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ in $\mathbb{R}_+$ met $S(a)$ de *drager* van a:

$$S(a) := \{n \in \mathbb{Z}_+ : a_n > 0\},$$

en merk op dat uit het tweede deel van de voorgaande propositie volgt dat voor een vernieuwingsrij u de drager $S(u)$ gesloten is onder optelling. Als $u_1 > 0$, dan is ook

$u_n \geq u_1^n > 0$ voor alle n, zodat $S(u) = \mathbb{Z}_+$. Noteer verder voor een deelverzameling A van $\mathbb{N}$ met $\mathrm{sg}\,(A)$ de *semigroep voortgebracht door* A, dat wil zeggen:

$$\mathrm{sg}\,(A) := \{n_1 + \cdots + n_k : n_1, \ldots, n_k \in A,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

De periode p_u van u wordt analoog aan die van de levensduurverdeling f gedefinieerd, dus

$$p_u := \mathrm{ggd}\,\{n \in \mathbb{N} : u_n > 0\} = \mathrm{ggd}\,(S(u) \setminus \{0\}),$$

waarbij $\mathrm{ggd}\,\emptyset := \infty$. (Het feit dat $u_0 = 1$ is dus irrelevant.)

Propositie 2.5 *Zij u een vernieuwingsrij bij levensduurverdeling f. Dan geldt:*

1. $S(u) = \mathrm{sg}\,(S(f)) \cup \{0\}$;

2. $p_u = p_f$. *(In het bijzonder is u aperiodiek als en alleen als f aperiodiek is.)*

Bewijs. We weten dat de u_n voor $n \in \mathbb{N}$ als volgt kan worden uitgedrukt in de f_n:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N} : \\ n_1 + \cdots + n_k = n}} f_{n_1} \cdots f_{n_k}.$$

Als nu $u_n > 0$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$, dan is er een $k \in \mathbb{N}$ en zijn er $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ zodat $n_1 + \cdots + n_k = n$ en $f_{n_1} > 0, \ldots, f_{n_k} > 0$. Dus $S(u) \setminus \{0\} \subset \mathrm{sg}\,(S(f))$. Omdat $u_n \geq f_n$, is $S(f) \subset S(u) \setminus \{0\}$. Aangezien $S(u)$ gesloten is onder optelling volgt hieruit dat ook $\mathrm{sg}\,(S(f)) \subset S(u) \setminus \{0\}$. Dit bewijst gelijkheid 1. Tevens volgt uit de inclusie $S(f) \subset S(u) \setminus \{0\}$ direct dat $p_f \geq p_u$. De omgekeerde ongelijkheid bewijzen we als volgt. De periode p_f van f is een gemene deler van $S(f)$, dus ook van $\mathrm{sg}\,(S(f))$ en dan wegens 1 ook van $S(u) \setminus \{0\}$. Maar p_u is de *grootste* gemene deler van deze verzameling, dus $p_f \leq p_u$. □

We zijn nu in staat om een eerste limietresultaat met betrekking tot de termen u_n van een vernieuwingsrij u voor $n \to \infty$ te bewijzen.

Stelling 2.6 *Zij u een vernieuwingsrij bij een aperiodieke levensduurverdeling f. Dan geldt:*

1. $u_n > 0$ *voor alle n voldoende groot;*

2. $a := \lim_{n\to\infty} \dfrac{-\log u_n}{n}$ *bestaat in $\mathbb{R}_+$, met* $a = \inf_{n \in S(u)\setminus\{0\}} \dfrac{-\log u_n}{n}$, *en dus is* $u_n \leq e^{-an}$ *voor alle n.*

Bewijs. Omdat de drager $S(u)$ van u gesloten is onder optelling, bevat $S(u)$ alle voldoend grote veelvouden van $\operatorname{ggd} S(u)$. Maar $\operatorname{ggd} S(u) = 1$, want f is aperiodiek en dus u ook. Voor alle voldoend grote n, zeg voor $n \geq n_0$, geldt dus: $n \in S(u)$, hetgeen bewering 1 bewijst. Zet vervolgens $a_n := -\log u_n$, $n \in S(u)$. Dan volgt uit bewering 2 van Propositie 2.4:

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n, \qquad m, n \in S(u).$$

Neem nu een $m \in S(u) \setminus \{0\}$ vast. Dan kunnen we voor $n \geq n_0$ schrijven

$$n - n_0 = k_n m + \ell_n, \qquad \text{ofwel} \qquad n = k_n m + (n_0 + \ell_n),$$

voor zekere unieke $k_n \in \mathbb{Z}_+$ en $\ell_n \in \{0, \ldots, m-1\}$. Omdat $m, n_0 + \ell_n \in S(u)$, vinden we nu:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{k_n m + (n_0+\ell_n)}}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{k_n a_m + a_{n_0+\ell_n}}{n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{k_n a_m}{n} = \frac{a_m}{m}.
\end{aligned}$$

Dus:

$$\inf_{m\in S(u)\setminus\{0\}} \frac{a_m}{m} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf_{m\in S(u)\setminus\{0\}} \frac{a_m}{m},$$

waardoor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{m\in S(u)\setminus\{0\}} \frac{a_m}{m}.$$

We concluderen dat

$$a := \lim_{n\to\infty} \frac{-\log u_n}{n} = \inf_{m\in S(u)\setminus\{0\}} \frac{-\log u_m}{m} \in \mathbb{R}_+,$$

en hieruit volgt ook de ongelijkheid

$$\frac{-\log u_n}{n} \geq a, \qquad \text{ofwel} \qquad u_n \leq \mathrm{e}^{-an},$$

voor alle $n \in S(u)$, en dan ook voor alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Het limietresultaat uit deze stelling kan men met behulp van regels van de logaritme als volgt vertalen:

$$\rho := \lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} \quad \text{bestaat, met} \quad \rho \in (0, 1].$$

Dan is $\rho = \mathrm{e}^{-a}$, zodat voor alle $n \in \mathbb{Z}_+ : u_n \leq \rho^n$ en dus $u_n/\rho^n \in [0, 1]$. Met behulp van Propositie 2.3 volgt nu dat de rij $(u_n/\rho^n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ een vernieuwingsrij is.

In de laatste propositie van deze paragraaf bekijken we het geval waarin de levensduurverdeling f een positief defect heeft.

Propositie 2.7 *Zij u een vernieuwingsrij bij levensduurverdeling f. Voor het defect d_f van f geldt dan: $d_f > 0$ als en alleen als $\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$ en in dat geval geldt:*

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{d_f}$;

2. *Het totaal aantal vernieuwingen N is naar 0 verschoven geometrisch (d_f) verdeeld en voor het laatste vernieuwingstijdstip S_N geldt:*

$$\mathbb{P}(S_N = n) = d_f u_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Bewijs. We maken gebruik van de volgende gelijkheid in de genererende functies U van u en F van f:

$$U(z) = \frac{1}{1 - F(z)}, \quad \text{ofwel} \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \Big(1 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k\Big)^{-1}.$$

Gebruik nu de monotone convergentiestelling; merk op dat voor $z \uparrow 1$:

$$\lim_{z \uparrow 1} U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \qquad \text{en} \qquad \lim_{z \uparrow 1} \big(1 - F(z)\big) = d_f.$$

Hiermee zijn de equivalentie en het eerste gevolg ervan bewezen. De verdeling van N bepalen we in dit geval als volgt. Voor $k \in \mathbb{Z}_+$:

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(T_1 < \infty, \ldots, T_k < \infty, T_{k+1} = \infty) = (1 - d_f)^k d_f,$$

dus N is geometrisch (d_f) op $\mathbb{Z}_+$. Voor de verdeling van S_N vinden we dat $\mathbb{P}(S_N = 0) = \mathbb{P}(N = 0) = d_f$, en dat voor $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(S_N = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n, T_{k+1} = \infty) = d_f u_n.$$

$\square$

Merk op dat uit deze propositie direct volgt dat ingeval $d_f > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

In paragraaf 4 wordt dit resultaat aanzienlijk verscherpt door één van de belangrijkste limietstellingen uit de vernieuwingstheorie.

We besluiten deze paragraaf met een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 2.8 Laat $f_1 = p$, $f_2 = q := 1 - p$, voor zekere $p \in [0,1]$, en dus voor de overige n: $f_n = 0$. Dan kan men eenvoudig met de vernieuwingsvergelijking en inductie bewijzen dat

$$u_n = \frac{1 - (-q)^{n+1}}{1+q}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Om deze uitdrukking voor u_n ook daadwerkelijk af te leiden is gebruik van genererende functies en breuksplitsing handig; voor $z \in [0,1)$ is

$$F(z) = pz + qz^2,$$

en dus:

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{1-F(z)} = \frac{1}{(1-z)(1+qz)} = \frac{1}{1+q}\frac{1}{1-z} + \frac{q}{1+q}\frac{1}{1+qz} \\ &= \frac{1}{1+q}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n + q\sum_{n=0}^{\infty}(-qz)^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-q)^{n+1}}{1+q} z^n. \end{aligned}$$

Wanneer $p = 0$ krijgen we de vernieuwingsrij $u = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$. □

Voorbeeld 2.9 Laat $u_n := a^n/n!$ voor $n \in \mathbb{Z}_+$, met $a > 0$. We vragen ons af of $u = (u_n)_n$ een vernieuwingsrij is. In ieder geval is $u_1 > 1$ als $a > 1$, dus we moeten eisen dat $a \in (0,1]$. Maar ook dan is u geen vernieuwingsrij, immers $a^2/2 < a^2$, waardoor niet aan de ongelijkheid $u_2 \geq u_1^2$ is voldaan. Een andere manier om dit aan te tonen is door gebruik te maken van de volgende relatie, die volgt uit de formule van Stirling:

$$\log n! \sim n \log n, \qquad \text{d.w.z.} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log n!}{n \log n} = 1.$$

Hiermee vinden we namelijk dat

$$\frac{-\log u_n}{n} = -\frac{1}{n}(n \log a - \log n!) = -\log a + \frac{\log n!}{n \log n}\log n$$

naar oneindig gaat als $n \to \infty$, zodat u volgens Stelling 2.6 onmogelijk een vernieuwingsrij kan zijn. □

Voorbeeld 2.10 Laat $u_n = \binom{r+n-1}{n} p^n$ voor $n \in \mathbb{Z}_+$, met $p \in (0,1)$ en $r > 0$. Ook nu vragen we ons af of $u = (u_n)_n$ een vernieuwingsrij is. Merk op dat $u_1 = rp$, dus een noodzakelijke voorwaarde is dat $r \leq 1/p$; in dat geval is ook $u_n \leq 1$ voor alle n. Aan de ongelijkheid $u_2 \geq u_1^2$ is voldaan als en alleen als de voorwaarde verscherpt wordt tot $r \leq 1$. Deze voorwaarde blijkt ook voldoende om u een vernieuwingsrij te laten zijn. Veronderstel immers dat $r \leq 1$, dan wordt de genererende functie van u gegeven door

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} (pz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-r}{n} (-pz)^n = (1-pz)^{-r},$$

en vinden we de rij f, bepaald door de vernieuwingsvergelijking, als volgt:

$$F(z) = 1 - \frac{1}{U(z)} = 1 - (1-pz)^r = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} (-1)^{k+1} (pz)^k,$$

dus voor $k \in \mathbb{N}$:

$$f_k = \binom{r}{k} (-1)^{k+1} p^k = \frac{r(1-r)\cdots(k-1-r)}{k!} p^k \geq 0,$$

want $r \leq 1$. Op grond van Propositie 2.2 (die toepasbaar is omdat $u_n \in [0,1]$ voor alle n) is u een vernieuwingsrij. □

3 Relatie met Markov-ketens

Beschouw een Markov-keten $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ met toestandsruimte I, overgangsmatrix $\mathcal{P}$ en start in een zekere toestand j. We kunnen als volgt heel eenvoudig een vernieuwingsrij uit deze keten afleiden. Beschouw daartoe de n-staps overgangskansen $p_{jj}^{(n)}$, welke zoals bekend voldoen aan

$$p_{jj}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{jj}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

waarbij $(f_{jj}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de terugkeerverdeling van toestand j is. Met Propositie 2.1 volgt nu onmiddellijk dat de rij $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ met

$$u_0 := 1, \qquad u_n := p_{jj}^{(n)}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

een vernieuwingsrij is bij levensduurverdeling f, met

$$f_n := f_{jj}^{(n)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Het is een verrassend resultaat dat *alle* vernieuwingsrijen u op deze manier verkregen kunnen worden. We zullen dit op twee verschillende manieren bewijzen. Beschouw daartoe bij een gegeven vernieuwingsrij $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ met levensduurverdeling $f = (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de *staartrij* $g := (g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ bij f, gedefinieerd door

$$g_0 := 1, \qquad g_n := 1 - \sum_{k=1}^{n} f_k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Merk op dat bij eindigheid van het eindpunt r_f van f geldt:

$$g_n > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n \leq r_f - 1.$$

Definieer verder de verzameling I door

$$I := \begin{cases} \{0, \ldots, r_f - 1\}, & \text{als } r_f < \infty; \\ \mathbb{Z}_+, & \text{als } r_f = \infty, \end{cases}$$

en de matrix $\mathcal{P} := (p_{ij})_{i,j \in I}$ door

$$p_{ij} := \begin{cases} f_{i+1}/g_i, & \text{als } j = 0; \\ g_{i+1}/g_i, & \text{als } j = i+1 \in I; \\ 0, & \text{elders,} \end{cases} \qquad i, j \in I.$$

Ingeval $r_f < \infty$ ziet deze matrix er als volgt uit:

$$\mathcal{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r_f - 2 \\ r_f - 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & r_f - 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} f_1 & g_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_2/g_1 & 0 & g_2/g_1 & 0 & & 0 \\ f_3/g_2 & 0 & 0 & g_3/g_2 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ f_{r_f-1}/g_{r_f-2} & 0 & 0 & 0 & & g_{r_f-1}/g_{r_f-2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

We zien dat $\mathcal{P}$ een Markov-matrix is, dus we kunnen een Markov-keten $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ beschouwen met toestandsruimte I en overgangsmatrix $\mathcal{P}$, die start in toestand 0. De terugkeertijd τ_0 van 0 is als volgt verdeeld; voor $n \in \mathbb{N}$ (met $n \leq r_f$ als $r_f < \infty$) is

$$\begin{aligned} f_{00}^{(n)} &:= \mathbb{P}_0(\tau_0 = n) = \mathbb{P}_0(X_1 = 1, X_2 = 2, \ldots, X_{n-1} = n-1, X_n = 0) \\ &= p_{01} p_{12} \cdots p_{n-2,n-1} p_{n-1,0} = g_1 \frac{g_2}{g_1} \cdots \frac{g_{n-1}}{g_{n-2}} \frac{f_n}{g_{n-1}} = f_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Wegens de vernieuwingsvergelijking worden de kansen u_n volledig bepaald door de kansen f_n en omgekeerd. Uit de Markov-theorie weten we dat een soortgelijke vergelijking ook geldt voor de terugkeerkansen $f_{00}^{(n)}$ en de overgangskansen $p_{00}^{(n)}$. Hiermee zien we dat

$$p_{00}^{(n)} = u_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Hiermee is de aangekondigde omkering bewezen! Iedere vernieuwingsrij $(u_n)_n$ kan gezien worden als een rij $(p_{jj}^{(n)})_n$ van n-staps overgangskansen in een Markov-keten. We kunnen in dit geval nog meer zeggen. Laat $i, j \in I$. Dan is er (wegens de keuze van I) een $k \geq i$ zodat $f_{k+1} > 0$, ofwel $p_{k0} > 0$. We kunnen in de keten dus van k naar 0 in één stap. Aan de overgangsmatrix $\mathcal{P}$ zien we dat we van i naar k en van 0 naar j in een eindig aantal stappen kunnen. Hieruit volgt dat de keten *irreducibel* is. We vatten onze bevindingen samen in de volgende stelling.

Stelling 3.1 *Zij $u = (u_n)_n$ een vernieuwingsrij. Dan is er een irreducibele Markov-keten $(X_n)_n$ met zekere toestandsruimte I en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j\in I}$, en er is een toestand $j \in I$ zodat*

$$u_n = p_{jj}^{(n)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Beschouw de situatie van de stelling. Omdat de levensduurverdeling f bij u precies de terugkeerverdeling $(f_{jj}^{(n)})$ van j is, geldt:

$$\begin{aligned} d_f > 0 &\iff j \text{ is een transiënte toestand;} \\ d_f = 0 &\iff j \text{ is een recurrente toestand,} \end{aligned}$$

waarbij we het laatste geval als volgt verder kunnen opdelen:

$$\begin{aligned} \mu_f < \infty &\iff j \text{ is een positief-recurrente toestand;} \\ \mu_f = \infty &\iff j \text{ is een nul-recurrente toestand.} \end{aligned}$$

Het belangrijkste deel van de voorgaande stelling zullen we nu, zoals reeds aangekondigd, op een tweede manier bewijzen. We bestuderen nu een Markov-keten $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ met toestandsruimte $\tilde{I} := \mathbb{Z}_+$ en overgangsmatrix $\widetilde{\mathcal{P}} := (\tilde{p}_{ij})_{i,j\in\tilde{I}}$, waarbij voor $i, j \in \tilde{I}$:

$$\tilde{p}_{ij} := \begin{cases} f_j, & \text{als } i = 1,\, j \geq 1; \\ d_f, & \text{als } i = 1,\, j = 0; \\ 1, & \text{als } i = 0,\, j = 0 \text{ en als } i \geq 2,\, j = i - 1; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

We kunnen $\widetilde{\mathcal{P}}$ als volgt weergeven:

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ d_f & f_1 & f_2 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array},$$

zodat $\widetilde{\mathcal{P}}$ inderdaad een Markov-matrix is. Laat de keten starten in 1. Dan vinden we voor $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{f}_{11}^{(n)} := \mathbb{P}_1(\tilde{\tau}_1 = n) = \mathbb{P}_1(Y_1 = n, Y_2 = n-1, \ldots, Y_n = 1) = f_n,$$

en dus:

$$\tilde{p}_{11}^{(n)} = u_n.$$

Hiermee hebben we voor de tweede maal een vernieuwingsrij $(u_n)_n$ geschreven als een rij $(p_{jj}^{(n)})$ van n-staps overgangskansen in een Markov-keten en is Stelling 3.1 (op de irreducibiliteit na) voor de tweede maal bewezen. De reden dat we dit tweemaal gedaan hebben is dat de ketens $(X_n)_n$ en $(Y_n)_n$ in het niet-defectieve geval een interpretatie hebben in termen van het vernieuwingsproces bij u. Dan kan X_n namelijk gezien worden als de verstreken levensduur ten tijde n, en Y_n (onder weglating van toestand 0) als de resterende levensduur ten tijde n (zie paragraaf 1). Een bewijs hiervan wordt gegeven in [3] uit de literatuurlijst.

Stelling 3.1 kent een aantal interessante toepassingen. In paragraaf 2 hebben we bewezen dat voor een vernieuwingsrij u de ongelijkheid $u_m u_n \leq u_{m+n}$ geldt. Met behulp van de stelling kunnen we nu ook een bovengrens van u_{m+n} bepalen.

Propositie 3.2 *Zij u een vernieuwingsrij. Dan geldt voor alle $m, n \in \mathbb{Z}_+$:*

$$u_m u_n \leq u_{m+n} \leq u_m u_n + 1 - u_m.$$

Bewijs. Beschouw een Markov-keten met toestandsruimte I zodat voor zekere $j \in I$: $p_{jj}^{(n)} = u_n$, voor alle n. Dan volgt met behulp van de vergelijkingen van Chapman-Kolmogorov voor $m, n \in \mathbb{Z}_+$:

$$u_{n+m} - u_m u_n = \sum_{k \in I} p_{jk}^{(m)} p_{kj}^{(n)} - p_{jj}^{(m)} p_{jj}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{jk}^{(m)} p_{kj}^{(n)},$$

dus

$$0 \leq u_{m+n} - u_m u_n \leq \sum_{k \neq j} p_{jk}^{(m)} = 1 - u_m.$$

$\square$

Als bijzonder geval vinden we dat $u_1 u_{n-1} \leq u_n \leq 1 - (1 - u_1) u_{n-1}$, en dan ook door iteratie, dat $u_1^n \leq u_n \leq 1 - (1 - u_1) u_1^{n-1}$, voor $n \in \mathbb{N}$.

Propositie 3.3 *Als u en v vernieuwingsrijen zijn en $k \in \mathbb{N}$, dan zijn de rijen*

$$\begin{array}{lcccl} {}^k u, & \textit{met} & ({}^k u)_n & := & u_{kn}; \\ uv, & \textit{met} & (uv)_n & := & u_n v_n, \end{array}$$

weer vernieuwingsrijen.

Bewijs. Wegens Stelling 3.1 weten we dat er een Markov-keten $(X_n)_n$ is met zekere toestandsruimte I en een toestand $i \in I$ zodat $u_n = \mathbb{P}_i(X_n = i)$. Ook het proces $(X_{kn})_{n \in \mathbb{Z}_+} = (X_0, X_k, X_{2k}, \ldots)$ is een Markov-keten met dezelfde toestandsruimte I, en omdat

$$\mathbb{P}_i(X_{kn} = i) = u_{kn} = ({}^k u)_n,$$

volgt dat ${}^k u$ een vernieuwingsrij is. Daarnaast is er een Markov-keten $(Y_n)_n$, onafhankelijk van $(X_n)_n$, met een toestandsruimte $\tilde{I}$ en een toestand $j \in \tilde{I}$ zodat $v_n = \mathbb{P}_j(Y_n = j)$. Nu definieert $Z_n := (X_n, Y_n)$ een Markov-keten met toestandsruimte $I \times \tilde{I}$, en omdat

$$\mathbb{P}_{(i,j)}\big(Z_n = (i,j)\big) = u_n v_n = (uv)_n,$$

volgt dat ook uv een vernieuwingsrij is. $\square$

Uit het tweede deel van de voorgaande propositie zien we dat de collectie van alle vernieuwingsrijen een halfgroep vormt met termsgewijze vermenigvuldiging als operatie. Het eenheidselement in deze halfgroep is de rij $(1, 1, 1, \dots)$, corresponderend met $f_1 = 1$, $f_n = 0$, $n \geq 2$ (zie Voorbeeld 1.1).

We hebben bewezen dat de collectie van de vernieuwingsrijen gelijk is aan de collectie van alle rijen $(\mathbb{P}_j(X_n = j))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ zodat $(X_n)_n$ een Markov-keten is met j een toestand. In het bijzonder vormen alle rijen $(\mathbb{P}(X_n = 0))_n$ zodat $(X_n)_n$ een stochastische wandeling is, met start in 0, een deelklasse ervan. We geven een voorbeeld uit deze deelklasse.

Voorbeeld 3.4 We bekijken de (vrije) Bernoulli(p)-wandeling, gestart in 0, waarbij $p \in (0,1)$. Deze wandeling is een Markov-keten met toestandsruimte $I = \mathbb{Z}$ en overgangsmatrix $\mathcal{P} = (p_{ij})_{i,j \in I}$ met

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{als } j = i+1; \\ q := 1-p, & \text{als } j = i-1; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Dan volgt (zie [3]):

$$p_{00}^{(n)} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{1}{2}n}(pq)^{\frac{1}{2}n}, & \text{als } n \text{ even;} \\ 0, & \text{als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Dit geeft een vernieuwingsrij van periode 2. Met Propositie 3.3 kunnen we hieruit eenvoudig een aperiodieke vernieuwingsrij afleiden: $u_n := p_{00}^{(2n)}$, dus:

$$u_n = \binom{2n}{n}(pq)^n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Met behulp van de binomiaalreeks vinden we dat de genererende functie van u gegeven wordt door

$$U(z) = (1-4pqz)^{-1/2}, \qquad \text{zodat} \qquad F(z) = 1 - (1-4pqz)^{1/2}, \qquad \text{en}$$

$$f_k = 4pqu_{k-1} - u_k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Het defect van f is:

$$d_f = 1 - F(1) = |p - q|.$$

Wanneer $p = 1/2$ is het totaal aantal vernieuwingen N bij levensduurverdeling f dus oneindig met kans 1; zie paragraaf 1. Ingeval $p \neq 1/2$ heeft N een geometrische (d_f) verdeling op $\mathbb{Z}_+$; zie Propositie 2.7. Ook de verdeling van het aantal vernieuwingen N_n in $(0, n]$ is expliciet te bepalen wanneer $p = 1/2$; zie hiervoor de opgaven in Hoofdstuk III van [3]. □

Een ander voorbeeld, waarbij de Markov-theorie ons nieuwe vernieuwingsrijen oplevert, is het volgende.

Voorbeeld 3.5 Laat $Y_1, Y_2, \dots$ onafhankelijke, standaard-alternatief(p) verdeelde stochasten zijn, met $p \in (0,1)$. Neem een $m \in \mathbb{N}$ vast en definieer voor $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$X_n := \begin{cases} 0, & \text{als } Y_{n+k} = 1 \text{ voor alle } k = 1, \dots, m; \\ \max\big\{k \in \{1, \dots, m\} : Y_{n+k} = 0\big\}, & \text{anders.} \end{cases}$$

Dan is $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ een Markov-keten met toestandsruimte $I := \{0, 1, \dots, m\}$, en overgangsmatrix $\mathcal{P} := (p_{ij})_{i,j \in I}$ gegeven door

$$p_{ij} := \begin{cases} p, & \text{als } j = i - 1 \in I \text{ of } i = j = 0; \\ q := 1 - p, & \text{als } j = m; \\ 0, & \text{anders,} \end{cases} \qquad i, j \in I,$$

ofwel:

$$\mathcal{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & \cdots & m-1 & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} p & 0 & \cdots & 0 & q \\ p & 0 & & 0 & q \\ 0 & p & & 0 & q \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p & q \end{pmatrix} \end{array}.$$

Voor de n-staps overgangskans $p_{00}^{(n)}$ vinden we:

$$\begin{aligned} p_{00}^{(n)} &= \mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 0) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = \cdots = Y_{n+m} = 1 | Y_1 = \cdots = Y_m = 1) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} p^n, & \text{als } n < m \\ p^m, & \text{als } n \geq m \end{array} \right\} = p^{\min\{n,m\}}. \end{aligned}$$

We concluderen dat de rij $u = (u_n)_n$ met

$$u_n = p^{\min\{n,m\}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

een vernieuwingsrij is. We kunnen aan deze rij de volgende interpretatie verbinden. Stel, een voetganger wil een (éénbaans) weg oversteken, hetgeen m tijdseenheden duurt. Laat de auto's op de weg passeren volgens de standaard alternatieve verdeling, dat wil zeggen, $Y_n = 1$ indien er op tijdstip n een auto passeert en 0 anders. Dan is $X_n = 0$ precies als er op tijdstip n de komende m tijdseenheden geen auto passeert en er dus gelegenheid is om over te steken. Aangenomen dat dit op tijdstip $n = 0$ het geval is, is u_n precies de kans dat de voetganger op tijdstip n kan oversteken. $\square$

4 De elementaire vernieuwingsstelling

Zij $u = (u_n)_n$ een vernieuwingsrij bij levensduurverdeling f. We veronderstellen in deze paragraaf dat f *aperiodiek* is. In dat geval geldt er namelijk een beroemde stelling over het limietgedrag van de rij u. We zullen deze stelling de *elementaire vernieuwingsstelling* (afgekort tot EVS) noemen. Er bestaan vele verschillende bewijzen voor deze stelling. Een klassiek analytisch bewijs (afkomstig van het drietal Erdös-Feller-Pollard) kan gevonden worden in [2]. Later vond men ook een meer probabilistisch bewijs dat op een soortgelijke wijze gaat als het bewijs van de fundamentele limietstelling (FLS) voor Markov-ketens, namelijk via een koppelingsmethode. Nu we deze laatstgenoemde stelling als uitgangspunt accepteren, kunnen we de EVS ook bewijzen zonder koppelingsargument, maar met *behulp* van de FLS. Wegens Stelling 3.1 kunnen we bij de rij u een irreducibele Markov-keten $(X_n)_n$ beschouwen waarbij voor een zekere toestand j geldt:

$$u_n = p_{jj}^{(n)}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

met $p_{jj}^{(n)}$ de n-staps overgangskans van toestand j naar zichzelf. Voor de levensduurverdeling f bij u geldt dan dat $f_n = f_{jj}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, met $(f_{jj}^{(n)})_n$ de terugkeerverdeling van j. Als $\mu(j)$ de verwachte terugkeertijd van toestand j is, dan geldt $\mu_f = \mu(j)$. Stel nu dat f aperiodiek is: $p_f = 1$. Dan is ook $p_u = 1$, dus j is een aperiodieke toestand. Nu levert toepassing van de FLS:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu(j)} = \frac{1}{\mu_f},$$

en is de aangekondigde stelling bewezen.

Stelling 4.1 ***(Elementaire vernieuwingsstelling; EVS).*** *Een vernieuwingsrij $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, bij een aperiodieke levensduurverdeling f, heeft een limiet, met*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\mu_f},$$

waarbij $1/\mu_f := 0$ als de verwachte levensduur μ_f oneindig is.

In paragraaf 1 hebben we in de vernieuwingscontext laten zien dat voor het aantal vernieuwingen N_n op $(0, n]$ geldt:

$$\mathbb{E}N_n = \sum_{m=1}^{n} u_m,$$

met $(u_n)_n$ de vernieuwingsrij bij levensduurverdeling f. Hiermee vinden we met behulp van de EVS, samen met het feit dat gewone convergentie Césaro-convergentie naar dezelfde limiet impliceert, direct het volgende limietresultaat voor $\mathbb{E}N_n$. Dit resultaat wordt inzichtelijker wanneer we $\mathbb{E}N_n/n$ interpreteren als het verwachte *gemiddelde aantal vernieuwingen* per tijdseenheid op het interval $(0, n]$.

Gevolg 4.2 *Ingeval de levensduurverdeling f aperiodiek is, geldt voor het verwachte aantal vernieuwingen $\mathbb{E}N_n$ op $(0, n]$:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}N_n = \frac{1}{\mu_f}.$$

In het resterende deel van deze paragraaf geven we een andere belangrijke toepassing van de EVS. We bestuderen bij een aperiodieke levensduurverdeling f de uit paragraaf 1 en 3 bekende ketens $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ en $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, met

$$\begin{array}{rcll} X_n & = & n - S_{N_n}, & \text{de } \textit{verstreken levensduur} \text{ ten tijde } n, \\ Y_n & = & S_{N_n+1} - n, & \text{de } \textit{resterende levensduur} \text{ ten tijde } n, \end{array}$$

en het proces $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, met

$$L_n \;=\; X_n + Y_n = T_{N_n+1}, \quad \text{de } \textit{momentane levensduur} \text{ ten tijde } n.$$

Merk op dat $X_0 \equiv 0$, $Y_0 = L_0 = T_1$ en dat voor $n \in \mathbb{N}$ met kans 1: $X_n \in \{0, \ldots, n\}$, $Y_n \in \overline{\mathbb{N}}$ en $L_n \in \overline{\mathbb{N}}$. We hebben opgemerkt (niet bewezen) dat $(X_n)_n$ en $(Y_n)_n$ Markovketens zijn. Het proces $(L_n)_n$ is dat in het algemeen niet! Laat bijvoorbeeld $f_1, f_2 > 0$, dan geldt:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(L_2 = 2 \mid L_1 = 2, L_0 = 1) & = & 1, \quad \text{maar} \\ \mathbb{P}(L_2 = 2 \mid L_1 = 2, L_0 = 2) & = & f_2, \end{array}$$

zodat in het algemeen niet aan de Markov-eigenschap is voldaan. We zullen dan ook bij onderzoek naar het limietgedrag van deze drie processen geen Markov-theorie gebruiken. Daarvoor in de plaats passen we de EVS toe (die overigens wel met Markov-theorie bewezen is). Allereerst bepalen we de verdelingen van de stochasten X_n, Y_n en L_n. Op het eerste gezicht zou men kunnen vermoeden dat L_n verdeeld is volgens f, aangezien L_n een levensduur is. Dit blijkt echter niet waar te zijn; men spreekt wel van de *inspectie-paradox* (of: *wachttijd-paradox*). In het volgende resultaat is $(u_n)_n$ de vernieuwingsrij bij f en is $(g_n)_n$ de staartrij bij f, in paragraaf 3 gedefinieerd door $g_0 := 1$, $g_n := 1 - \sum_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Propositie 4.3 *Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt:*

1. $\mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j) = \begin{cases} f_{i+j}u_{n-i}, & \text{als } i \in \{0, \dots, n\}, j \in \mathbb{N}; \\ d_f u_{n-i}, & \text{als } i \in \{0, \dots, n\}, j = \infty; \end{cases}$

2. $\mathbb{P}(X_n = i) = g_i u_{n-i}, \qquad i \in \{0, \dots, n\};$

3. $\mathbb{P}(Y_n = j) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} f_{i+j}u_{n-i}, & \text{als } j \in \mathbb{N}; \\ d_f \sum_{k=0}^{n} u_k, & \text{als } j = \infty; \end{cases}$

4. $\mathbb{P}(L_n = \ell) = \begin{cases} f_\ell \sum_{k=n-\ell+1}^{n} u_k, & \text{als } \ell \in \{1, \dots, n\}; \\ f_\ell \sum_{k=0}^{n} u_k, & \text{als } \ell \in \{n+1, n+2, \dots\}; \\ d_f \sum_{k=0}^{n} u_k, & \text{als } \ell = \infty. \end{cases}$

Bewijs. Eerst bepalen we de simultane verdeling van X_n en Y_n. Voor $i \in \{0, \dots, n-1\}$ en $j \in \mathbb{N}$ volgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j) &= \mathbb{P}(S_{N_n} = n - i, S_{N_n+1} = n + j) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_n = k, S_k = n - i, S_{k+1} = n + j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n - i)\mathbb{P}(T_{k+1} = i + j) = f_{i+j}u_{n-i}, \end{aligned}$$

en voor $j \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X_n = n, Y_n = j) = \mathbb{P}(T_1 = n + j) = f_{n+j}.$$

Samen met het feit dat

$$\mathbb{P}(X_n = i, Y_n = \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n-i)\mathbb{P}(T_{k+1} = \infty) = \left\{ \begin{array}{ll} d_f u_{n-i}, & \text{als } i \leq n-1 \\ d_f, & \text{als } i = n \end{array} \right\} = d_f u_{n-i},$$

geeft dit 1. Sommatie over $j \in \overline{\mathbb{N}}$ voor $i \in \{0, \dots, n\}$ geeft vervolgens 2:

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{i+j} u_{n-i} + d_f u_{n-i} = g_i u_{n-i}.$$

Bewering 3 volgt op dezelfde manier direct door sommatie over $i \in \{0, \ldots, n\}$ en het geval $j = \infty$ apart te bekijken. Tenslotte bewering 4. Voor $\ell \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_n = \ell) &= \mathbb{P}(X_n + Y_n = \ell) = \textstyle\sum_{i=0}^{\ell-1} \mathbb{P}(X_n = i, Y_n = \ell - i) \\ &= \begin{cases} f_\ell \sum_{i=0}^{\ell-1} u_{n-i}, & \text{als } \ell \leq n; \\ f_\ell \sum_{i=0}^{n} u_{n-i}, & \text{als } \ell > n. \end{cases} \end{aligned}$$

En voor $\ell = \infty$:

$$\mathbb{P}(L_n = \infty) = \mathbb{P}(Y_n = \infty) = d_f \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

□

We zien nu ook dat L_n inderdaad niet gelijkverdeeld is met T_1. Met behulp van de EVS krijgen we de volgende limietstelling:

Stelling 4.4 *Bij een aperiodieke levensduurverdeling f geldt:*

1. $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_f} f_{i+j}, & \text{als } i \in \mathbb{Z}_+, j \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{als } i \in \mathbb{Z}_+, j = \infty; \end{cases}$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{\mu_f} g_i, \qquad i \in \mathbb{Z}_+;$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = j) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_f} g_{j-1}, & \text{als } j \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{als } j = \infty, d_f = 0; \\ 1, & \text{als } j = \infty, d_f > 0; \end{cases}$$

4. $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(L_n = \ell) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_f} \ell f_\ell, & \text{als } \ell \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{als } \ell = \infty, d_f = 0; \\ 1, & \text{als } \ell = \infty, d_f > 0. \end{cases}$$

Bewijs. Bij een vaste i levert de EVS dat u_{n-i} voor $n \to \infty$ naar $1/\mu_f$ convergeert. Omdat ook $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i, Y_n = \infty) = d_f/\mu_f = 0$, volgen hiermee 1 en 2. Voor 3 schrijven we voor $j \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Y_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{i+j} u_{n-i} 1_{[0,n]}(i).$$

Wegens de gedomineerde convergentiestelling en de EVS convergeert dit naar

$$\frac{1}{\mu_f} \sum_{i=0}^{\infty} f_{i+j} = \frac{1}{\mu_f}\big(g_{j-1} - d_f\big) = \frac{1}{\mu_f} g_{j-1}.$$

Daarnaast is

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = \infty) = d_f \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \begin{cases} 0, & \text{als } d_f = 0; \\ d_f/d_f = 1, & \text{als } d_f > 0. \end{cases}$$

Het bewijs van bewering 4 gaat op soortgelijke wijze. □

Laat verder $\mu_f < \infty$ (dus in het bijzonder is f niet-defectief). Dan geldt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_{i+j} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_1 > i) = \mu_f,$$

waardoor uit bewering 1 van de voorgaande stelling volgt dat

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathrm{d}} (X, Y),$$

waarbij (X,Y) een stochastische vector is met kansverdeling gegeven door

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{\mu_f} f_{i+j}, \qquad i \in \mathbb{Z}_+, \quad j \in \mathbb{N}.$$

De marginale verdelingen van deze vector volgen hier eenvoudig uit:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i) &= \frac{1}{\mu_f} g_i, \qquad i \in \mathbb{Z}_+; \\ \mathbb{P}(Y = j) &= \frac{1}{\mu_f} g_{j-1}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Merk op dat $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y - 1$. Laat verder $L := X + Y$, dan geldt voor $\ell \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(L = \ell) = \sum_{i=0}^{\ell-1} \mathbb{P}(X = i, Y = \ell - 1) = \frac{1}{\mu_f} \ell f_\ell.$$

Dus uit de beweringen 2, 3 en 4 van de vorige limietstelling volgt:

$$\begin{aligned} X_n &\xrightarrow{\mathrm{d}} X; \\ Y_n &\xrightarrow{\mathrm{d}} Y; \\ L_n &\xrightarrow{\mathrm{d}} L. \end{aligned}$$

We interpreteren de stochasten X, Y en L ook wel als resp. de *verstreken, resterende en momentane levensduur in de stationaire toestand*.

Tot slot nog een aardige eigenschap. Laat U een standaard-homogeen verdeelde stochastische variabele zijn, onafhankelijk van (X, Y). Noteer voor $r \in \mathbb{R}$ de *Entier* van r door $\lfloor r \rfloor$. Dan geldt voor $i \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lfloor UL \rfloor = i) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}\big(L = \ell, UL \in [i, i+1)\big) = \sum_{\ell=i+1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(L = \ell, U \in \big[\frac{i}{\ell}, \frac{i+1}{\ell}\big)\Big) \\ &= \sum_{\ell=i+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_f} \ell f_\ell \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\mu_f} g_i = \mathbb{P}(X = i), \end{aligned}$$

dus $X \overset{\mathrm{d}}{=} \lfloor UL \rfloor$: de stochast X is in verdeling de afronding (naar beneden) van een *homogeen verdeelde fractie* van L.

5 Het binomiaal-proces

In deze paragraaf bekijken we een heel bijzonder vernieuwingsproces. Laat de levensduren $T_1, T_2, \ldots$ *geometrisch* (p) verdeeld zijn. Dat wil zeggen (noteer $q := 1 - p$):

$$f_k = pq^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

In het bijzonder is f dan aperiodiek en niet-defectief. Voor $k \in \mathbb{N}$ is $S_k = T_1 + \cdots + T_k$, waardoor S_k *negatief-binomiaal* (k, p) verdeeld is:

$$\mathbb{P}(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}, \qquad n = k, k+1, k+2, \ldots.$$

Met behulp van het binomium kunnen we nu de vernieuwingsrij $u = (u_n)_n$ bij f eenvoudig bepalen:

$$u_n = \mathbb{P}(\exists\, k \in \mathbb{N} : S_k = n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = p, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dus u_n is constant voor $n \in \mathbb{N}$! Vervolgens zoeken we de verdeling van N_n, het aantal vernieuwingen in het interval $(0, n]$. Met het voorgaande zien we dat in ieder geval:

$$\mathbb{E}N_n = \sum_{m=1}^{n} u_m = np, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Omdat ook $N_n \in \{0, \ldots, n\}$, zou men kunnen vermoeden dat N_n *binomiaal* (n, p) verdeeld is. We zien als volgt dat dit inderdaad zo is. Merk op dat voor $\ell \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(T_1 > \ell) = q^\ell = \frac{1}{p}\mathbb{P}(T_1 = \ell + 1).$$

Hiermee vinden we voor $k \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_n = k) &= \mathbb{P}(S_k \leq n, S_{k+1} > n) = \sum_{m=k}^{n} \mathbb{P}(S_k = m, T_{k+1} > n - m) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{m=k}^{n} \mathbb{P}(S_k = m)\mathbb{P}(T_{k+1} = n - m + 1) = \frac{1}{p}\sum_{m=k}^{n} \mathbb{P}(S_k = m, S_{k+1} = n + 1) \\
&= \frac{1}{p}\mathbb{P}(S_{k+1} = n + 1) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.
\end{aligned}$$

Op grond hiervan noemt men het hier beschouwde vernieuwingsproces ook wel het *binomiaal-proces*. Dit proces heeft een aantal bijzondere eigenschappen. Zo hebben we gezien dat de vernieuwingsrij $(u_n)_n$ constant is voor $n \in \mathbb{N}$. Er geldt echter ook een omkering hiervan.

Stelling 5.1 *Zij $u = (u_n)_n$ een vernieuwingsrij bij levensduurverdeling f. Dan is u_n voor $n \in \mathbb{N}$ constant als en alleen als f geometrisch is.*

Bewijs. We hebben reeds gezien dat de vernieuwingsrij van het binomiaal-proces constant is. Stel vervolgens dat u_n constant is, zeg $u_n =: p$, voor alle $n \in \mathbb{N}$, zekere $p \in (0, 1)$. Dan geldt dat $f_1 = u_1 = p$ en wegens de vernieuwingsvergelijking:

$$p = f_n + p\sum_{k=1}^{n-1} f_k, \qquad \text{ofwel} \qquad f_n = pg_{n-1}.$$

Hieruit vinden we de recursieve uitdrukking

$$f_n = p(f_n + g_n) = pf_n + f_{n+1}, \qquad \text{dus} \qquad f_{n+1} = qf_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

en omdat $f_1 = p$, levert dit dat $f_k = pq^{k-1}$ voor $k \in \mathbb{N}$ en dus dat f geometrisch (p) is. $\square$

Bekijk nog eens de stochasten X en Y uit de vorige paragraaf; de verstreken, resp. resterende levensduur in de stationaire toestand. We hebben gezien dat zij als volgt verdeeld zijn:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i) &= \frac{1}{\mu_f} g_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+; \\ \mathbb{P}(Y=j) &= \frac{1}{\mu_f} g_{j-1}, \quad j \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Ingeval f geometrisch (p) is, geldt dat $\mu_f < \infty$. Het bovenstaande resultaat uit de vorige paragraaf is dus van toepassing. We vinden met behulp hiervan eenvoudig dat Y ook geometrisch (p) is. Analoog, of direct met behulp van het feit dat $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y-1$, zien we dat X dan een naar 0 verschoven geometrisch (p) verdeling heeft. De laatste eigenschap van het binomiaalproces die we hier behandelen gaat over onafhankelijkheid van X en Y.

Stelling 5.2 *X en Y zijn onafhankelijk als en alleen als f geometrisch verdeeld is.*

Bewijs. Merk eerst op dat voor $i \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) \qquad \text{als en alleen als}$$

$$f_{i+j} = p g_i g_{j-1}, \qquad \text{voor } p := \frac{1}{\mu_f} \in (0,1).$$

Laat f geometrisch (p). Dan vinden we:

$$f_{i+j} = pq^i q^{j-1} = p\Big(p \sum_{n=i+1}^{\infty} q^{n-1}\Big)\Big(p \sum_{n=j}^{\infty} q^{n-1}\Big) = p g_i g_{j-1}.$$

Omgekeerd, als $f_{i+j} = p g_i g_{j-1}$, dan in het bijzonder $f_1 = p$ en

$$f_j = p g_{j-1}, \qquad \text{zodat} \qquad f_{j+1} = q f_j.$$

Analoog aan het laatste deel van het vorige bewijs vinden we dat f geometrisch (p) is. □

6 Log-convexe rijen

Zij u een vernieuwingsrij bij levensduurverdeling f. In paragraaf 2 hebben we gezien dat $f_2 = u_2 - u_1^2$. Aangezien $f_2 \geq 0$, volgt hieruit dat $u_1^2 \leq u_0 u_2$. We zullen in deze paragraaf rijen bekijken waarvoor een sterkere vorm van deze eigenschap geldt, en onderzoeken wat het verband van zulke rijen met vernieuwingsrijen is.

Definitie 6.1 *Een rij $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ met $u_n \geq 0$ voor alle n heet* log-convex *als*

$$u_n^2 \leq u_{n-1} u_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Laat $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ een log-convexe rij zijn en stel dat $u_m > 0$ voor zekere $m \in \mathbb{N}$. Dan is ook $u_{m-1} > 0$ en $u_{m+1} > 0$. Op deze manier vinden we met inductie dat $u_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{Z}_+$. We concluderen dat voor een log-convexe rij u geldt:

$$u_n = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \text{of} \qquad u_n > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+.$$

We beschouwen verder alleen het laatste geval. In dat geval zijn de getallen $a_n := \log u_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ gedefinieerd en is de rij $(a_n)_n$ *convex*, d.w.z.

$$a_n \leq \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dit verklaart de term 'log-convex'. Er geldt nu het volgende.

Propositie 6.2 *Als u een log-convexe rij is, dan is u ook een convexe rij.*

Bewijs. We maken gebruik van de volgende ongelijkheid voor getalletjes $a, b \geq 0$:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b),$$

welke eenvoudig gereduceerd kan worden tot de triviale ongelijkheid $0 \leq (a-b)^2$. Omdat u per aanname log-convex is, vinden we nu:

$$u_n \leq \sqrt{u_{n-1}u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

□

We gaan nu op zoek naar een verband tussen log-convexe rijen en vernieuwingsrijen. Laat u daartoe een rij in $[0,1]$ zijn met $u_0 = 1$ die log-convex is. Omschrijven van (3) geeft

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

en dus, door iteratie:

$$u_n u_{k-1} - u_{n-1}u_k \geq 0, \quad \text{of ook} \quad u_n u_{n-k-1} - u_{n-1}u_{n-k}, \quad n \geq 2, k \in \{1, \ldots, n-1\}. \quad (4)$$

We weten uit Propositie 2.2 dat u een vernieuwingsrij is als (en alleen als) de rij f, bepaald door de vernieuwingsvergelijking, voldoet aan $f_k \geq 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. We zullen door middel van inductie laten zien dat dit laatste inderdaad geldt. Allereerst is $f_1 = u_1 \geq 0$, daar u in $[0,1]$ is gekozen. Voor de inductiestap merken we op dat de vernieuwingsvergelijking de volgende uitdrukkingen levert:

$$\begin{aligned} u_n &= f_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_{n-k}; \\ u_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_{n-1-k}. \end{aligned}$$

Dus:

$$u_n u_{n-1} = \begin{cases} u_{n-1} f_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_{n-1} u_{n-k}; \\ \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_n u_{n-1-k}. \end{cases}$$

Dit levert de volgende recurrente betrekking voor f_n:

$$u_{n-1} f_n = \sum_{k=1}^{n-1} f_k (u_n u_{n-1-k} - u_{n-1} u_{n-k}).$$

Neem nu aan dat $f_k \geq 0$ voor $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ en zekere $n \geq 2$. Uit (4) volgt nu dat het rechterlid (en dus ook het linkerlid) van bovenstaande betrekking niet-negatief is en dus, omdat $u_{n-1} > 0$, dat $f_n \geq 0$. Hiermee is de volgende stelling bewezen.

Stelling 6.3 *Zij u een rij in $[0, 1]$ met $u_0 = 1$ die log-convex is. Dan is u een vernieuwingsrij.*

Er bestaat een alternatief bewijs van deze stelling dat als volgt gaat. Laat u voldoen aan $u_0 = 1$, $u_n \in [0, 1]$ voor alle n, en log-convex zijn. Dan is, zoals we boven gezien hebben, de rij $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, gedefinieerd door

$$v_n := \frac{u_{n+1}}{u_n}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

monotoon stijgend. Stel vervolgens dat er een m is zodat $v_m > 1$. Dan zou $u_n \to \infty$ als $n \to \infty$. Immers,

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_1}{u_0} = v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_0,$$

en $(v_n)_n$ is stijgend. Dit is in tegenspraak met het feit dat $u_n \leq 1$ voor alle n. We kunnen hieruit twee conclusies trekken:

1. $v_n \leq 1$ voor alle n, en dus is u dalend.

2. $(v_n)_n$ heeft een limiet v, met $v \leq 1$.

Noteer nu voor $i \in \mathbb{N}$:

$$p_i := \frac{v_{i-1}}{v_i} \in (0,1).$$

Dan kunnen we voor alle $k \in \mathbb{N}$ schrijven:

$$v_n = p_{n+1} \cdots p_{n+k} v_{n+k}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Laat $k \to \infty$, dan wordt deze vergelijking:

$$v_n = \Big(\prod_{i=n+1}^{\infty} p_i \Big) v, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Hiermee vinden we met behulp van 'Fubini' voor $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{u_{j+1}}{u_j} = \prod_{j=0}^{n-1} v_j = \prod_{j=0}^{n-1} \Big(v \prod_{i=j+1}^{\infty} p_i \Big) \\ &= v^n \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{\min\{i-1,n-1\}} p_i = v^n \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\min\{i,n\}}. \end{aligned}$$

Op grond van de Voorbeelden 1.1 en 3.5 en de Proposities 2.3 en 3.3 concluderen we dat (u_n) een vernieuwingsrij is en is Stelling 6.3 voor de tweede maal bewezen.

Van de volgende stelling lijkt het bewijs erg op dat van Stelling 6.3.

Stelling 6.4 *Zij u een vernieuwingsrij bij levensduurverdeling f. Als f een log-convexe rij is, dat wil zeggen $f_n^2 \leq f_{n-1} f_{n+1}$ voor alle $n \geq 2$ in $\mathbb{N}$, dan is ook u log-convex.*

Bewijs Neem aan dat f log-convex is. Voor $n = 1$ volgt ongelijkheid (3) uit het bekende feit dat $u_0 u_2 - u_1^2 = f_2 \geq 0$. Voor $n \geq 2$ passen we inductie toe. Veronderstel dat de ongelijkheid $u_m^2 \leq u_{m-1} u_{m+1}$ geldt voor alle $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Om deze ongelijkheid voor $m = n$ te bewijzen zullen we de volgende vergelijking gebruiken:

$$f_n(u_{n-1} u_{n+1} - u_n^2) = \sum_{k=1}^{n-1} (u_n u_{n-1-k} - u_{n-1} u_{n-k})(f_{n+1} f_k - f_n f_{k+1}). \tag{5}$$

Men bewijst dit als volgt door het rechterlid uit te schrijven:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n-1} u_n u_{n-1-k} f_{n+1} f_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_n u_{n-1-k} f_n f_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} u_{n-1} u_{n-k} f_{n+1} f_k \\
+ & \sum_{k=1}^{n-1} u_{n-1} u_{n-k} f_n f_{k+1} \\
= & f_{n+1} u_n \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_{n-1-k} - f_n u_n \sum_{\ell=2}^{n} f_\ell u_{n-\ell} - f_{n+1} u_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_{n-k} + f_n u_{n-1} \sum_{\ell=2}^{n} f_\ell u_{n+1-\ell} \\
= & f_{n+1} u_n u_{n-1} - f_n u_n (u_n - f_1 u_{n-1}) - f_{n+1} u_{n-1} (u_n - f_n) + f_n u_{n-1} (u_{n+1} - f_1 u_n - f_{n+1}) \\
= & f_n (u_{n-1} u_{n+1} - u_n^2).
\end{aligned}$$

Merk op dat we op grond van de opmerkingen na Definitie 6.1 mogen veronderstellen dat $f_k > 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Nu volgt uit vergelijking (4) dat $(f_{n+1} f_k - f_n f_{k+1}) \geq 0$ voor $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Verder geldt wegens de inductie-aanname en (4) dat $(u_n u_{n-1-k} - u_{n-1} u_{n-k}) \geq 0$ voor $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, waardoor het rechterlid (en dus ook het linkerlid) van (5) niet-negatief is en dus geldt dat $u_n^2 \leq u_{n-1} u_{n+1}$. □

Nu we een aantal eigenschappen van log-convexe rijen hebben gezien, kan men zich afvragen of er ook nuttige eigenschappen gelden voor rijen $u = (u_n)_n$, met $u_n > 0$ voor alle n die *log-concaaf* zijn, dat wil zeggen

$$u_n^2 \geq u_{n-1} u_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Laat u een log-concave vernieuwingsrij zijn. Dan geldt dat $u_1^2 \geq u_2$. Aangezien de omgekeerde ongelijkheid altijd geldt (zie paragraaf 2), vinden we dat $u_2 = u_1^2$. Stel vervolgens dat $u_n = u_1^n$ voor alle $n \in \{1, \ldots, m\}$ en zekere $m \in \mathbb{N}$, dan vinden we door (6) toe te passen voor $n = m$, dat

$$u_1^{2m} \geq u_1^{m-1} u_{m+1}, \qquad \text{en dus} \qquad u_1^{m+1} \geq u_{m+1}.$$

Omdat wegens Propositie 2.4 de omgekeerde ongelijkheid altijd geldt, hebben we gevonden dat $u_{m+1} = u_1^{m+1}$. Hiermee is door middel van inductie het volgende bewezen.

Propositie 6.5 *De log-concave vernieuwingsrijen u, met $u_n > 0$ voor alle n, zijn precies die vernieuwingsrijen u waarvoor $u_n = p^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, en zekere $p \in (0, 1]$.*

Deze vernieuwingsrijen hebben we reeds gezien in Voorbeeld 1.1. We sluiten de paragraaf af met een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 6.6 Beschouw de vernieuwingsrij u gegeven door

$$u_n = \binom{2n}{n} (pq)^n, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{zekere } p \in (0, 1), \quad q = 1 - p,$$

uit Voorbeeld 3.4. Dan is u log-convex. Immers, voor $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned}
u_n^2 \leq u_{n-1}u_{n+1} &\quad\Longleftrightarrow \\
\binom{2n}{n}^2 \leq \binom{2n-2}{n-1}\binom{2n+2}{n+1} &\quad\Longleftrightarrow \\
\frac{(2n)!^2}{n!^4} \leq \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}\,\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} &\quad\Longleftrightarrow \\
\frac{(2n)!}{(2n-2)!}\,\frac{(n+1)!^2}{n!^2} \leq \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\,\frac{n!^2}{(n-1)!^2} &\quad\Longleftrightarrow \\
(2n)(2n-1)(n+1)^2 \leq (2n+2)(2n+1)n^2 &\quad\Longleftrightarrow \\
(2n-1)(n+1) \leq (2n+1)n &\quad\Longleftrightarrow \\
n-1 \leq n, &
\end{aligned}$$

een triviale ongelijkheid. □

Voorbeeld 6.7 Beschouw de vernieuwingsrij u gegeven door

$$u_n = p^{\min\{n,m\}}, \qquad m, n \in \mathbb{N}, \qquad \text{zekere } p \in (0,1),$$

uit Voorbeeld 3.5. Dan is u log-convex, hetgeen volgt door de volgende drie gevallen te onderscheiden:

$$\begin{aligned}
n < m: &\quad u_n^2 = p^{2n} = p^{n-1}p^{n+1} = u_{n-1}u_{n+1}; \\
n = m: &\quad u_n^2 = p^{2m} \geq p^{2m-1} = p^{m-1}p^m = u_{n-1}u_{n+1}; \\
n > m: &\quad u_n^2 = p^{2m} = u_{n-1}u_{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Voorbeeld 6.8 Laat de rij u gegeven zijn door

$$u_n = (n+1)^{-a}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{zekere } a > 0.$$

Dan is u een log-convexe rij en dus een vernieuwingsrij. Dit volgt uit de ongelijkheid $m^2 \geq (m-1)(m+1)$, ofwel

$$\left(\frac{1}{m^2}\right)^{2a} \leq \left(\frac{1}{m-1}\right)^a \left(\frac{1}{m+1}\right)^a, \qquad m \geq 2 \text{ in } \mathbb{N}.$$

Kies hierin m van de vorm $m = n+1$ voor $n \in \mathbb{N}$, dan volgt dat

$$u_n^2 \leq u_{n-1}u_{n+1}.$$

Voor bijvoorbeeld $a = 1$ krijgen we de rij

$$u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots).$$

Merk op dat het zonder Stelling 6.3 erg lastig lijkt om te bewijzen dat deze u een vernieuwingsrij is. $\square$

7 Oneindig deelbare vernieuwingsrijen

We hebben in paragraaf 3 gezien dat als u en v vernieuwingsrijen zijn, de rij uv, gedefinieerd door $(uv)_n := u_n v_n$, $n \in \mathbb{N}$, ook een vernieuwingsrij is. In het bijzonder is dus u^2 een vernieuwingsrij. Kennelijk zijn er vernieuwingsrijen u zodat $u = v^2$, met v een vernieuwingsrij; we noemen zo'n rij *2-deelbaar*. Algemener noemen we u *m-deelbaar* ($m \in \mathbb{N}$) als $u = v^m$, met v een vernieuwingsrij. In deze paragraaf bekijken we rijen u die dit zijn voor iedere m.

Definitie 7.1 *Een vernieuwingsrij u heet* oneindig deelbaar *als u m-deelbaar is voor elke $m \in \mathbb{N}$. Dat wil zeggen, voor elke $m \in \mathbb{N}$ is er een vernieuwingsrij $u^{(m)}$ zodat*

$$u = (u^{(m)})^m.$$

Er geldt dus dat u oneindig deelbaar is als en alleen als $u^{1/m}$ een vernieuwingsrij is voor iedere $m \in \mathbb{N}$. De volgende propositie beweert iets sterkers.

Propositie 7.2 *Een vernieuwingsrij u is oneindig deelbaar als en alleen als u^t, gedefinieerd door $u^t := (1, u_1^t, u_2^t, \ldots)$, een vernieuwingsrij is voor alle $t > 0$.*

Bewijs. Zij u een oneindig deelbare vernieuwingsrij. Laat eerst $t \in \mathbb{Q}_+$, dus $t = r/s$ voor zekere $r, s \in \mathbb{N}$. Dan geldt uiteraard:

$$u^t = (u^{1/s})^r.$$

De rij $u^{1/s}$ is een vernieuwingsrij en dus ook zijn r-de macht (zie Propositie 3.3), waarmee u^t een vernieuwingsrij is. Voor willekeurige $t > 0$ kunnen we schrijven:

$$t = \lim_{m \to \infty} t_m,$$

voor zekere getallen $t_m \in \mathbb{Q}_+$. Dus:

$$u^t = \lim_{m \to \infty} u^{t_m},$$

zodat u^t een limiet van vernieuwingsrijen is en dus zelf een vernieuwingsrij (zie Propositie 2.3). De omgekeerde implicatie is triviaal. $\square$

We beschouwen verder alleen oneindig deelbare vernieuwingsrijen die aperiodiek zijn. We kunnen dan een relatie met de log-convexe rijen uit de vorige paragraaf aantonen. De volgende propositie zullen we daarbij gebruiken.

Propositie 7.3 *Voor een aperiodieke, oneindig deelbare vernieuwingsrij u geldt:*

$$u_n > 0 \text{ voor alle } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Bewijs. Veronderstel dat u aperiodiek is en oneindig deelbaar, dus $u^{1/m}$ is een vernieuwingsrij voor alle $m \in \mathbb{N}$. Definieer de rij $v := \lim_{m\to\infty} u^{1/m}$ door

$$v_n := \lim_{m\to\infty} u_n^{1/m} = \begin{cases} 0, & \text{als } u_n = 0; \\ 1, & \text{als } u_n > 0; \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

dan is v een vernieuwingsrij wegens Propositie 2.3. Daar $p_u = 1$ geldt dat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ is zodat $u_n > 0$ voor alle $n \geq n_0$ (Propositie 2.6), ofwel $v_n = 1$ voor alle $n \geq n_0$. Stel nu dat $v_1 = 0$ en neem een $n > n_0$, dan zou $v_{n-1} = 1$ en $v_n \leq 1-(1-v_1)v_{n-1} = 1-v_{n-1} = 0$; een onmogelijkheid! Dus is $v_1 > 0$ en dus is wegens (de opmerkingen na) Propositie 2.4 voor iedere n: $v_n > 0$, ofwel $v_n = 1$, dus $u_n > 0$. □

Stelling 7.4 *Een aperiodieke vernieuwingsrij u is oneindig deelbaar als en alleen als u log-convex is.*

Bewijs. Laat u log-convex zijn. Dan geldt wegens (3) voor alle $t > 0$:

$$u_n^{2t} \leq u_{n-1}^t u_{n+1}^t,$$

en dus is u^t log-convex en daarmee (Stelling 6.3) een vernieuwingsrij. Uit Propositie 7.2 concluderen we nu dat u oneindig deelbaar is.
De omgekeerde implicatie is aanzienlijk minder eenvoudig. Laat u oneindig deelbaar zijn. Wegens de aperiodiciteit van u is $u_n > 0$ voor alle n (zie voorgaande propositie) en dus kunnen we schrijven

$$u_n = e^{-x_n}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

voor getallen $x_n \in \mathbb{R}_+$ met $x_0 = 0$. Omdat u oneindig deelbaar is, kunnen we voor iedere $t > 0$ een rij $(f_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ vinden die de rol van levensduurverdeling voor de vernieuwingsrij u^t heeft, dat wil zeggen: $f_k(t) \geq 0$ voor alle k, en

$$u_n^t = \sum_{k=1}^{n} f_k(t) u_{n-k}^t, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Uit deze vernieuwingsvergelijking volgt voor $t \downarrow 0$ dat $1 = \sum_{k=1}^n \lim_{t\downarrow 0} f_k(t)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (want $\lim_{t\downarrow 0} u_n^t = \lim_{t\downarrow 0} \exp(-x_n t) = 1$ voor alle n), dus voor $n = 1$: $\lim_{t\downarrow 0} f_1(t) = 1$ en dus voor $k \geq 2$: $\lim_{t\downarrow 0} f_k(t) = 0$. Met bijvoorbeeld l'Hôpital volgt nu dat

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1-u_n^t}{t} = x_n, \qquad \text{en} \qquad \lim_{t\downarrow 0} \frac{1-u_n^{2t}}{t} = 2x_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

zodat in het bijzonder (merk op dat $f_1(t) = u_1^t$):

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1 - f_1(t)}{t} = x_1.$$

Al dit voorbereidende werk kunnen we nu als volgt gebruiken om te bewijzen dat u log-convex is. We beweren dat

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f_n(t)}{t} = 2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}, \qquad n \geq 2. \tag{7}$$

Voor $n = 2$ bewijzen we dit als volgt.

$$\frac{f_2(t)}{t} = \frac{u_2^t - u_1^{2t}}{t} = \frac{1 - u_1^{2t}}{t} - \frac{1 - u_2^t}{t},$$

en deze uitdrukking gaat naar $2x_1 - x_2$ voor $t \downarrow 0$. Voor $n \geq 3$ passen we inductie toe. Enig omschrijven van de vernieuwingsvergelijking voor $t > 0$ levert de uitdrukking

$$\begin{aligned} f_n(t) &= u_n^t - f_1(t)u_{n-1}^t - \sum_{j=2}^{n-1} f_j(t)u_{n-j}^t \\ &= \big(1 - f_1(t)\big) + f_1(t)(1 - u_{n-1}^t) - (1 - u_n^t) - \sum_{j=2}^{n-1} f_j(t)u_{n-j}^t, \end{aligned}$$

dus

$$\frac{f_n(t)}{t} = \frac{1 - f_1(t)}{t} + f_1(t)\frac{1 - u_{n-1}^t}{t} - \frac{1 - u_n^t}{t} - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{f_j(t)}{t} u_{n-j}^t.$$

Wegens de inductie-aanname gaat deze uitdrukking voor $t \downarrow 0$ naar

$$x_1 + x_{n-1} - x_n - \sum_{j=2}^{n-1} (2x_{j-1} - x_j - x_{j-2}) = 2x_{n-1} - x_n - x_{n-2},$$

waarmee (7) bewezen is. Het linkerlid (en dus ook het rechterlid) van (7) is niet-negatief aangezien $f_n(t) \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Met andere woorden:

$$2x_{n-1} \geq x_n + x_{n-2}, \qquad \text{ofwel} \qquad u_{n-1}^2 \leq u_n u_{n-2}, \qquad n \geq 2,$$

dus u is log-convex. $\square$

8 Hausdorff-rijen

In deze paragraaf bekijken we rijen $u = (u_n)_n$ in $[0, 1]$ die momentenrij zijn bij één of andere kansverdeling op het eenheidsinterval $[0, 1]$.

Definitie 8.1 *Een rij $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ noemen we een* Hausdorff-rij *als*

$$u_n = \mathbb{E}X^n = \int_{[0,1]} x^n \, \mathbb{P}_X(dx), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

voor een $[0, 1]$-waardige stochastische variabele X.

Merk op dat voor een dergelijke u uiteraard $u_0 = 1$, een eigenschap die vernieuwingsrijen ook bezitten. Dit blijkt echter geen toeval te zijn.

Stelling 8.2 *Als $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ een Hausdorff-rij is, dan is u log-convex en dus een vernieuwingsrij.*

Bewijs. Schrijf $u_n = \mathbb{E}X^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ voor zekere $[0, 1]$-waardige stochast X. We moeten bewijzen dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n^2 \le u_{n-1}u_{n+1}, \qquad \text{ofwel} \qquad \big(\mathbb{E}X^n\big)^2 \le \mathbb{E}X^{n-1}\mathbb{E}X^{n+1}.$$

Dit kan direct door $Y_1 := X^{(n-1)/2}$ en $Y_2 := X^{(n+1)/2}$ te substitueren in de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:

$$\big(\mathbb{E}|Y_1Y_2|\big)^2 \le \mathbb{E}Y_1^2\mathbb{E}Y_2^2,$$

voor stochastische variabelen Y_1 en Y_2. □

Tot slot zullen we deze stelling illustreren in een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 8.3 Neem $X = p$ met kans 1, voor zekere $p \in [0, 1]$, dus X heeft een ontaarde kansverdeling op $[0, 1]$. Dan is de bijbehorende momentenrij de uit Voorbeeld 1.1 bekende vernieuwingsrij $u = (1, p, p^2, p^3, \ldots)$; kennelijk een Hausdorff-rij. □

Voorbeeld 8.4 Neem X standaard alternatief (p) verdeeld, voor een $p \in [0, 1]$. Dan krijgen we als momentenrij de ons bekende vernieuwingsrij $u = (1, p, p, p, \ldots)$ bij het binomiaal-proces uit paragraaf 5. Deze rij is dus een Hausdorff-rij. □

Voorbeeld 8.5 Neem X homogeen verdeeld op $(0, 1)$, dan wordt de momentenrij gegeven door $u_n = 1/(n + 1)$ voor $n \in \mathbb{Z}_+$; deze vernieuwingsrij hebben we reeds in paragraaf 6 gezien en is ook een Hausdorff-rij. □

Voorbeeld 8.6 De uit paragraaf 2 bekende vernieuwingsrij $u = (u_n)_n$, gegeven door

$$u_n = \frac{1-(-q)^{n+1}}{1+q}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{zekere } q \in (0,1],$$

is geen Hausdorff-rij. Immers, de rij u is niet monotoon (bijvoorbeeld $u = (1,0,1,0,\ldots)$ ingeval $q = 1$), en dus niet log-convex en daarmee (Stelling 8.2) geen Hausdorff-rij. □

Voorbeeld 8.7 Beschouw de vernieuwingsrij $u = (u_n)_n$, gegeven door

$$u_n = \binom{2n}{n}(pq)^n, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{zekere } p \in (0,1) \text{ en } q := 1-p,$$

die we in paragraaf 3 hebben afgeleid uit de Bernoulli(p)-wandeling. We laten als volgt zien dat u een Hausdorff-rij is. Zij Z een stochastische variabele met een *arcsinus-verdeling*, d.w.z. dat Z absoluut-continu verdeeld is op (0,1) met kansdichtheid f_Z gegeven door:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}, \qquad z \in (0,1).$$

Dan is bekend dat $\mathbb{E}Z^n = \binom{n-1/2}{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, en $4pqZ \in (0,1)$ met kans 1. Hiermee vinden we:

$$u_n = \binom{-1/2}{n}(-4pq)^n = \binom{n-1/2}{n}(4pq)^n = \mathbb{E}(4pqZ)^n.$$

□

9 Slotwoord

We hebben in deze scriptie gekeken naar vernieuwingsrijen en allerlei eigenschappen van dit soort rijen bewezen. Door de jaren heen is er veel theorie over dit onderwerp ontwikkeld; veel meer dan in deze scriptie is opgenomen. Voor de lezers die geïnteresseerd zijn geraakt in dit onderwerp, en onderwerpen die hierop aansluiten, zijn er boeken en artikelen beschikbaar.

Historische artikelen zijn onder meer die van Kaluza [4] uit 1928, waarin op analytische wijze een aantal ons bekende eigenschappen van vernieuwingsrijen, log-convexe rijen en Hausdorff-rijen voor het eerst worden bewezen. Later bewezen De Bruijn en Erdös in [1] een aantal stellingen over log-convexiteit, en bewees Kingman in [7] belangrijke eigenschappen van Hausdorff-rijen (wat in feite zogeheten *compleet monotone rijen* zijn). Hoofdstuk 11 van Feller [2] geeft een probabilistische interpretatie van vernieuwingsrijen in termen van zogeheten *recurrente gebeurtenissen*. Aan de rekenkunde van operaties op de ruimte van vernieuwingsrijen (zoals producten en machten) hebben wij slechts geroken; artikelen over dit onderwerp zijn die van Lamperti [10], Kendall [5] (via het begrip oneindige deelbaarheid) en Kingman [8]. In het laatstgenoemde artikel bewijst Kingman dat als u een vernieuwingsrij is, u^t dat ook is voor alle $t > 1$. Dit hebben wij slechts gezien voor de deelklasse van oneindig deelbare vernieuwingsrijen.

Een onderwerp dat aansluit op de theorie van vernieuwingsrijen is *regeneratieve verschijnselen*; dit zijn $\{0, 1\}$-waardige processen waarvan de eindig-dimensionale verdelingen bepaald worden door vernieuwingsrijen. Over dit onderwerp gaat het boek [6] van Kingman en zijn artikel [9] uit 2004, waarin nieuwe ontwikkelingen op dit gebied aan de orde komen. Er bestaat ook een continu analogon van de theorie van regeneratieve verschijnselen, waarin de vernieuwingsrijen vervangen worden door zogeheten *p-functies*. Onlangs bewees Kingman in zijn artikel [9] een soortgelijk resultaat voor p-functies als dat uit [8] voor vernieuwingsrijen. Hiermee is duidelijk dat de vernieuwingstheorie nog volop in ontwikkeling is en dat er in de toekomst nog vele ontdekkingen op dit gebied zullen worden gedaan.

Literatuurlijst

[1] de Bruijn, N.G. en Erdös, P., On a recursion formula and on some Tauberian theorems, *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **50**, 1953, p. 161–164.

[2] Feller, W., *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I, Wiley, New York, 3-rd ed., 1968.

[3] van Harn, K. en Holewijn, P.J., *Markov-ketens in discrete tijd*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2-de druk, 2003.

[4] Kaluza, Th., Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen, *Math. Zeitschrift* **28**, 1928, p. 161–170.

[5] Kendall, D.G., Renewal sequences and their arithmetic, *Symposium in Prob. Methods in Analysis, Lecture Notes in Math.* **31**, 1967, p. 147–175 [reprint in Kendall, D.G. en Harding, E.F., *Stochastic analysis*, Wiley, London, 1973].

[6] Kingman, J.F.C., *Regenerative phenomena*, Wiley, London, 1972.

[7] Kingman, J.F.C., A simple model for the balance between selection and mutation, *J. Appl. Probability* **15**, 1978, p. 10–12.

[8] Kingman, J.F.C., Powers of renewal sequences, *Bull. London Math. Soc.* **28**, 1995, p. 527–532.

[9] Kingman, J.F.C., Powers and products of regenerative phenomena, *Aust. N.Z.J. Stat.* **46**, 2004, p. 79–86.

[10] Lamperti, J., On the coefficients of reciprocal power series, *Amer. Math. Montly* **65**, 1958, p. 90–94.

[11] Shanbhag, D.N., On renewal sequences, *Bull. London Math. Soc.* **9**, 1976, p. 79–80.