Vrije Universiteit Amsterdam
Wiskunde en Informatica

Geluid

(Project Wiskunde Werkt)

A.E. Weber

2002

Inhoudsopgave

1. Inleiding

In dit project houden we ons bezig met vragen die te maken hebben met geluid in een bepaalde ruimte. Stel, we hebben in zo'n ruimte een geluidsbron, die een constant geluid produceert met een bepaalde *geluidssterkte*. We gaan dan onderzoeken wat de geluidssterkte in een punt in de omgeving van de geluidsbron is. Daarnaast kijken we wat de invloed is van andere objecten in de omgeving, bijvoorbeeld muren. Als verschillende ruimten waarin de bron zich bevindt nemen we de buitenlucht, en vervolgens een aantal verschillende zalen.

Allereerst maken we enkele afspraken. De geluidsbron die in elk model voorkomt produceert geluid met een constante geluidssterkte die we S noemen. We zullen de geluidssterkte in een punt p voortaan S_p noemen en de geluidssterkte op een afstand r van de geluidsbron $S(r)$. We weten uit ervaring dat de geluidssterkte die we horen kleiner wordt naarmate de afstand tot de bron groter is. Uit metingen is gebleken dat de geluidssterkte omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand. Om ons model zo eenvoudig mogelijk te maken veronderstellen we dat de evenredigheidsconstante die hierbij hoort 1 is, in werkelijkheid is dit niet zo. Daarnaast is het zo dat normaal gesproken de geluidssterkte wordt gemeten in decibel (dB). Dit is een logaritmische schaal, waardoor het modelleren erg lastig wordt. Daarom kiezen we bij ons model voor een lineaire schaal. We nemen aan dat binnen een cirkel met als middelpunt de plaats van de bron en met straal 1 de geluidssterkte constant S is. Buiten die cirkel geldt dat de geluidssterkte omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand tot de bron. Aldus stellen we vast:

$$S(r) = \begin{cases} S & \text{als } 0 \leq r \leq 1; \\ \frac{S}{r^2} & \text{als } r > 1. \end{cases}$$

2. Spreken in de open lucht

In het eerste model beschouwen we de volgende situatie. We bevinden ons ergens in een open ruimte. We voeren een (2-dimensionaal) assenstelsel in. In het punt $(0, 0)$ bevindt zich een spreker die een geluid produceert met geluidssterkte S. Het is duidelijk dat op 1 meter of minder van de spreker af, de geluidssterkte die een luisteraar hoort S is, en bijvoorbeeld op exact 5 meter afstand $\frac{S}{25}$. Vanaf nu zullen we het feit dat de geluidssterkte constant is op afstanden kleiner dan of gelijk aan een meter verwaarlozen. We beschouwen alleen punten op afstanden groter dan een meter. De geluidssterkte in een willekeurig punt (x, y) is dan te berekenen met gebruik van de stelling van Pythagoras. Deze is namelijk:

$$S_{(x,y)} = \frac{S}{x^2 + y^2}$$

We nemen nu aan dat er 5 meter achter de spreker een rechte muur van 10 meter staat, evenwijdig aan de x-as, dus van $(-5, -5)$ tot $(5, -5)$. Nu moeten we weten wat de invloed van de muur is. Deze kan geluid weerkaatsen of absorberen. We nemen eerst aan dat we een zogeheten *harde muur* hebben, dat betekent dat alle geluid door de muur weerkaatst wordt. We zijn weer geïnteresserd in de geluidssterkte in een willekeurig punt (x, y).

We kunnen echter het probleem ook op een andere manier bekijken. In plaats van te rekenen met de weerkaatsing van de spreker kunnen we ook een zogenaamde *spiegelspreker* invoeren. De plaats van de spiegelspreker is te bepalen door de spreker loodrecht te spiegelen in de muur. De spiegelspreker bevindt zich dus in het punt $(0, -10)$. Verder is er nog iets aardigs aan de hand met de spiegelspreker. Alleen als je de spreker kan zien dan hoor je hem ook, terwijl je de spiegelspreker juist alleen hoort als je hem niet kan zien. We kunnen nu de geluidssterkte in een punt op de y-as bepalen en vinden:

$$S_{(0,y)} = \begin{cases} \frac{S}{y^2} + \frac{S}{(y+10)^2} & \text{als } y \geq -5; \\ 0 & \text{als } y < -5. \end{cases}$$

Zo ook de geluidssterkte in een punt op de x-as:

$$S_{(x,0)} = \begin{cases} \frac{S}{x^2} + \frac{S}{x^2+10^2} & \text{als } |x| \leq 10; \\ \frac{S}{x^2} & \text{als } |x| > 10. \end{cases}$$

Voor de geluidssterkte in een punt (x, y) doen we het iets anders. We verdelen de ruimte in drie gebieden A, B en C. A is het gebied waar men zowel de spreker als de weerkaatsing (spiegelspreker) hoort, begrensd door de muur en de lijnen $y = -x - 10$ voor $x < -5$ en $y = x - 10$ voor $x > 5$. B is het gebied waar men alleen de spreker hoort en bestaat uit twee 'stukken', te weten het gebied begrensd door $y = -x - 10$ voor $x < -5$ en $y = x$, en het gebied begrensd door $y = x - 10$ voor $x > 5$ en $y = -x$. C is het gebied waar men niets hoort, begrensd door de muur en de lijnen $y = x$ voor $x < -5$ en $y = -x$ voor $x > 5$. Uiteraard geldt nu voor een willekeurig punt (x, y) in C dat:

$$S_{(x,y)} = 0$$

en voor een punt (x, y) in B dat:

$$S_{(x,y)} = \frac{S}{x^2 + y^2}$$

Voor een punt (x, y) in A moeten we de bijdrage van de spiegelspreker toevoegen:

$$S_{(x,y)} = \frac{S}{x^2 + y^2} + \frac{S}{x^2 + (y + 10)^2}$$

Tot nu toe zijn we uitgegaan van een harde muur, die 100% van het geluid weerkaatst. Nu gaan we uit van een zogeheten *zachte muur*, deze weerkaatst 80% van het geluid en absorbeert de rest. Het mag duidelijk zijn dat er bij de voorgaande berekeningen alleen voor punten in gebied A iets verandert. De bijdrage van de spiegelspreker wordt met een factor $\frac{4}{5}$ verminderd. De geluidssterkte in dit gebied wordt:

$$S_{(x,y)} = \frac{S}{x^2 + y^2} + \frac{4}{5}\,\frac{S}{x^2 + (y + 10)^2}$$

3. Spreken in een zaal

In het volgende model beschouwen we de geluidssterkte in een punt in een zaal. We nemen een zaal van 20 bij 20 meter met in het midden een spreker. We kiezen als volgt een assenstelsel: de oorsprong is het middel van de zaal, dus de positie van de spreker, de assen zijn evenwijdig met de wanden van de zaal. Dus de hoekpunten van de zaal liggen in $(10, 10)$, $(10, -10)$, $(-10, -10)$ en $(-10, 10)$. Als we eerst aannemen dat de muren alle geluid absorberen, dan is de geluidssterkte in een punt (x, y) in de zaal natuurlijk:

$$S_{(x,y)} = \frac{S}{x^2 + y^2}$$

en valt het op dat we in de hoeken van de zaal het minste geluid opvangen. We nemen nu aan dat de muren 100% terugkaatsen en beschouwen het geluid wat direct of via één weerkaatsing tegen een muur bij de luisteraar terecht komt. Er zijn nu vier spiegelsprekers en deze bevinden zich uiteraard in $(0, 20)$, $(20, 0)$, $(0, -20)$ en $(-20, 0)$. De geluidssterkte in een punt (x, y) in de zaal is dus:

$$S_{(x,y)} = \frac{S}{x^2 + y^2} + \frac{S}{x^2 + (y - 20)^2} + \frac{S}{(x - 20)^2 + y^2} +$$

$$\frac{S}{x^2 + (y + 20)^2} + \frac{S}{(x + 20)^2 + y^2}$$

Als de muren zachte muren zijn wordt deze geluidssterkte:

$$S_{(x,y)} = \frac{S}{x^2 + y^2} + \frac{4}{5}\,\frac{S}{x^2 + (y - 20)^2} + \frac{4}{5}\,\frac{S}{(x - 20)^2 + y^2} +$$

$$\frac{4}{5}\,\frac{S}{x^2 + (y + 20)^2} + \frac{4}{5}\,\frac{S}{(x + 20)^2 + y^2}$$

Nu beschouwen we een situatie die in de praktijk vaak voorkomt, namelijk dat de spreker zich niet in het midden van de zaal bevindt, maar aan één kant van de zaal (bijvoorbeeld een leraar voor de klas). Om precies te zijn in $(0, 9)$. De andere aannamen zijn identiek aan die van het vorige model. De posities van de spiegelsprekers zijn nu $(0, 11)$, $(0, -29)$,

$(20, 9)$ en $(-20, 9)$. De geluidssterkte in een punt van de zaal is nu in het geval van harde muren:

$$S_{(x,y)} = \frac{S}{x^2 + (y-9)^2} + \frac{S}{x^2 + (y-11)^2} + \frac{S}{x^2 + (y+29)^2} +$$

$$\frac{S}{(x-20)^2 + (y-9)^2} + \frac{S}{(x+20)^2 + (y-9)^2}$$

Als de muren zachte muren zijn wordt deze geluidssterkte:

$$S_{(x,y)} = \frac{S}{x^2 + (y-9)^2} + \frac{4}{5}\,\frac{S}{x^2 + (y-11)^2} + \frac{4}{5}\,\frac{S}{x^2 + (y+29)^2} +$$

$$\frac{4}{5}\,\frac{S}{(x-20)^2 + (y-9)^2} + \frac{4}{5}\,\frac{S}{(x+20)^2 + (y-9)^2}$$

4. Spiegelsprekers

In de modellen die we tot nu toe hebben gemaakt, hebben we alleen gekeken naar geluid dat direct of via één weerkaatsing bij de luisteraar terecht komt. Met andere woorden: we hebben alleen 1-ste orde spiegelsprekers beschouwd. Nu gaan we kijken wat de invloeden zijn van spiegelsprekers van hogere orde.

Beschouw de situatie zoals in het begin van het vorige hoofdstuk: een zaal van 20 bij 20 meter, muren evenwijdig met de assen en een spreker in $(0, 0)$. We hebben gezien dat de spiegelsprekers van de 1-ste orde zich bevinden in $(0, 20)$, $(20, 0)$, $(0, -20)$ en $(-20, 0)$. Stel nu dat een bepaalde geluidsgolf wordt weerkaatst in muur *zuid*. Dat is de muur waarbij de 1-ste orde spiegelspreker $(0, -20)$ hoort. Er zijn nu drie mogelijkheden, te weten:

• De golf kaatst vervolgens tegen muur *oost*. We vinden de bijbehorende spiegelspreker van de 2-de orde door spiegelspreker $(0, -20)$ te spiegelen in muur oost. Ofwel: we spiegelen de spreker twee keer in een muur. We vinden $(20, -20)$ als 2-de orde spiegelspreker.

• De golf kaatst vervolgens tegen muur *west*. We vinden $(-20, -20)$ als bijbehorende 2-de orde spiegelspreker.

• De golf kaatst vervolgens tegen muur *noord*. We vinden $(0, 40)$ als bijbehorende 2-de orde spiegelspreker.

We hebben nu drie 2-de orde spiegelsprekers gevonden, behorende bij het geval dat de eerste weerkaatsing in muur zuid is. Op deze manier kunnen we ook de andere drie gevallen nagaan en vinden we uiteindelijk acht verschillende 2-de orde spiegelsprekers. Dit zijn: $(20, 20)$, $(20, -20)$, $(-20, -20)$, $(-20, 20)$, $(0, 40)$, $(40, 0)$, $(0, -40)$, $(-40, 0)$. Opmerking: de eerste vier hiervan treden dubbel op.

Nu valt ons iets op. De vier 1-ste orde spiegelsprekers zijn de hoekpunten van een vierkant, waarop ook de hoekpunten van de zaal liggen. Alle 2-de orde spiegelsprekers liggen ook op een vierkant, één die twintig meter verder naar buiten ligt t.o.v. het eerste vierkant. Het blijkt dat we alle 3-de orde spiegelsprekers simpel kunnen vinden door nog zo'n vierkant te construeren. Het blijken er twaalf te zijn. We hebben nu dus vier 1-ste orde, acht 2-de orde en twaalf 3-de orde spiegelsprekers. Dit geeft aanleiding tot het volgende vermoeden:

Het aantal n-de orde spiegelsprekers is $4n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Deze stelling is waar en leent zich uitstekend voor een bewijs met volledige inductie. We gaan, alvorens dit bewijs te geven, eerst na hoe we de n-de orde spiegelsprekers kunnen bepalen als we de posities van de $(n-1)$-ste orde spiegelsprekers kennen. We weten al dat een n-de orde spiegelspreker ontstaat door het geluid van een $(n-1)$-ste orde spiegelspreker één keer te laten weerkaatsen.

We gaan nu als volgt te werk. We geven de vier lijnen die door de muren gaan namen: l_1 is de lijn $x = 10$, l_2 is $x = -10$, l_3 is $y = 10$ en l_4 is $y = -10$. Het vierkant dat als hoekpunten de posities van de 1-ste orde spiegelsprekers heeft, noemen we V_1. Ook de zijden van dit vierkant geven we namen: V_{11} is de zijde tussen $(0, 20)$ en $(20, 0)$, V_{12} is de zijde tussen $(20, 0)$ en $(0, -20)$, V_{13} is de zijde tussen $(0, -20)$ en $(-20, 0)$, en V_{14} is de zijde tussen $(-20, 0)$ en $(0, 20)$. Bekijk nu de zijde V_{11}, deze heeft twee 1-ste orde spiegelsprekers als hoekpunten. Als we nu V_{11} spiegelen in de lijnen die deze niet snijdt - dit zijn dus de lijnen l_2 en l_4 - dan vinden we vier verschillende hoekpunten van beide spiegelingen. Dit zijn de punten $(-20, 20)$, $(-40, 0)$, $(20, -20)$ en $(0, -40)$, en dit zijn vier van de acht 2-de orde spiegelsprekers. Op deze manier kunnen we ook de andere drie zijden van V_1 spiegelen in de lijnen die ze niet snijden. Dan vinden we precies alle acht 2-de orde spiegelsprekers, en ieder daarvan komt precies twee keer als beeldpunt voor.

Alle 2-de orde spiegelsprekers, ofwel alle spiegelingen van zijden van V_1 geven samen een vierkant. Deze noemen we V_2. De zijden van dit vierkant nummeren we analoog aan de zijden van V_1. We doen nu met deze zijden hetzelfde als met de zijden van V_1: we spiegelen ze in de lijnen die ze niet snijden. Als we bijvoorbeeld V_{21}, waar drie 2-de orde spiegelsprekers op liggen, spiegelen in de lijnen l_2 en l_4, dan vinden we zes van de twaalf 3-de orde spiegelsprekers. Doen we hetzelfde met de overige zijden van V_2, dan vinden we alle twaalf 3-de orde spiegelsprekers, en ieder daarvan komt precies twee keer als beeldpunt voor. Het vierkant waarop deze liggen noemen we V_3 en de zijden nummeren we analoog aan de zijden van V_1 en van V_2.

We weten nu over het aantal 2-de orde spiegelsprekers het volgende:

$$\text{Aantal 2-de orde spiegelsprekers } =$$

$$\frac{(\text{Aant. zijden } V_1) \cdot (\text{Aant. sp.sprekers op een zijde}) \cdot (\text{Aant. spiegelingen van een zijde})}{\text{Aant. keer dat een 2-de orde spiegelspreker als beeldpunt voorkomt}} =$$

$$\frac{4 \cdot 2 \cdot 2}{2} = 8$$

Op analoge wijze vinden we dat het aantal 3-de orde spiegelsprekers 12 is.

We hebben nu het een en ander gezien over de positiebepaling en het tellen van de 2-de en 3-de orde spiegelsprekers. Nu zijn we toe aan een herformulering en een bewijs van de stelling. Met V_n geven we aan het vierkant met hoekpunten $(0, 20n)$, $(20n, 0)$, $(0, -20n)$ en $(-20n, 0)$. De zijden van dit vierkant nummeren we analoog aan V_1. Verder voeren we in de verzamelingen

S_{n1} = { (20k, 20(n - k)), k = 0, . . . , n },
S_{n2} = { (20(n - k), -20k), k = 0, . . . , n },
S_{n3} = { (-20k, 20(k - n)), k = 0, . . . , n },
S_{n3} = { (20(k - n), 20k), k = 0, . . . , n }.

Hiervoor geldt dat S_{ij} bestaat uit de i-de orde spiegelsprekers die op de zijde V_{ij} liggen voor $i \in \mathbb{N}$ en $j = 1, \ldots, 4$. Onze nieuwe stelling wordt:

$\forall\ n \in \mathbb{N}\ :\ S_{n1} \cup S_{n2} \cup S_{n3} \cup S_{n4}$ is de verzameling van alle n-de orde spiegelsprekers.

De eerste stap van het bewijs, de basis, is eenvoudig: $n = 1$:

$S_{11} = \{(0, 20), (20, 0)\}$
$S_{12} = \{(20, 0), (0, -20)\}$
$S_{13} = \{(0, -20), (-20, 0)\}$
$S_{14} = \{(-20, 0), (0, 20)\}$

Dit is de verzameling van alle 1-ste orde spiegelsprekers.

Voor de inductiestap nemen we aan dat de bewering waar is voor zekere $m \in \mathbb{N}$. Nu gaan we de zijden van V_m spiegelen in de lijnen die ze niet snijden. Een voorbeeld: V_{m1} in l_4. We weten:

$$S_{m1} = \{(20k, 20(m-k)), k = 0, \ldots, m\} = \{(0, 20m), (20, 20(m-1)), \ldots, (20m, 0)\}$$

Deze verzameling heeft als beeld de verzameling

$$\{(0, -20m - 20), (20, -20(m-1) - 20), \ldots, (20m, -20)\} =$$
$$\{(0, -20(m+1)), (20, -20m), \ldots, (20m, -20)\} =$$
$$\{(20m, -20), (20(m-1), -40), \ldots, (0, -20(m+1))\} = \{(20(m-k), -20(k+1)), k = 0, \ldots, m\} =$$
$$S_{m+1,2} \setminus \{(20(m+1), 0)\}$$

Op deze manier kunnen we ook de zeven andere beeldverzamelingen bepalen. Bij elkaar geeft dit:

V_{m1} in l_4 geeft als beeld van S_{m1} de verzameling $S_{m+1,2} \setminus \{(20(m+1), 0)\}$
V_{m1} in l_2 geeft als beeld van S_{m1} de verzameling $S_{m+1,4} \setminus \{(0, 20(m+1))\}$
V_{m2} in l_3 geeft als beeld van S_{m2} de verzameling $S_{m+1,1} \setminus \{(20(m+1), 0)\}$
V_{m2} in l_2 geeft als beeld van S_{m2} de verzameling $S_{m+1,3} \setminus \{(0, -20(m+1))\}$
V_{m3} in l_1 geeft als beeld van S_{m3} de verzameling $S_{m+1,2} \setminus \{(0, -20(m+1))\}$
V_{m3} in l_3 geeft als beeld van S_{m3} de verzameling $S_{m+1,4} \setminus \{(-20(m+1), 0)\}$
V_{m4} in l_1 geeft als beeld van S_{m4} de verzameling $S_{m+1,1} \setminus \{(0, 20(m+1))\}$
V_{m4} in l_4 geeft als beeld van S_{m4} de verzameling $S_{m+1,3} \setminus \{(-20(m+1), 0)\}$

We bekijken vervolgens de punten in $S_{m+1,1}$. Deze verzameling is $S_{m+1,1} = \{(20k, 20(m-k+1)), k = 0, \ldots, m+1\}$. Voor al deze punten, behalve (0, 20(m + 1)) en (20(m + 1), 0), is het makkelijk na te gaan dat deze precies twee keer als beeldpunt voorkomen, namelijk in het beeld van S_{m2} in l_3 en S_{m4} in l_1. De twee punten waarvoor dit niet geldt komen hier beide maar één keer in voor. Maar (0, 20(m + 1)) komt ook nog in het beeld van een andere spiegeling voor, namelijk in het beeld van S_{m3} in l_3. Ook (20(m + 1), 0) komt op deze manier nog ergens tevoorschijn. Dus alle punten van $V_{m+1,1}$ komen precies twee keer als beeldpunt voor. Zo kunnen we ook voor de andere drie zijden van V_{m+1} nagaan dat alle punten precies twee keer als beeldpunt voorkomen.

We hebben nu bewezen dat elk element uit $S_{m+1,1} \cup S_{m+1,2} \cup S_{m+1,3} \cup S_{m+1,4}$ is voortgekomen uit precies twee elementen van $S_{m1} \cup S_{m2} \cup S_{m3} \cup S_{m4}$ en wel door middel van een spiegeling in een muur van de zaal. Omgekeerd: elke spiegeling van een element uit $S_{m1} \cup S_{m2} \cup S_{m3} \cup S_{m4}$ in een muur levert een punt in de verzameling $S_{m+1,1} \cup S_{m+1,2} \cup S_{m+1,3} \cup S_{m+1,4}$ op. We hebben laten zien dat dit het geval is als we de punten spiegelen in de lijnen die ze niet snijden. Het is makkelijk na te gaan dat spiegeling in de overige lijnen geen nieuwe spiegelsprekers oplevert. We concluderen nu: $S_{m+1,1} \cup S_{m+1,2} \cup S_{m+1,3} \cup S_{m+1,4}$ is de verzameling van alle $(m+1)$-ste orde spiegelsprekers. En daarmee is de inductiestap van het bewijs geleverd. $\square$

We hebben nu de herformulering van de stelling bewezen. De oorspronkelijke stelling ging over het *aantal* n-de orde spiegelsprekers. Daarvoor geldt nu:

Aantal n-de orde spiegelsprekers $= \#(S_{n1} \cup S_{n2} \cup S_{n3} \cup S_{n4}) =$
$(n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) - 4 = 4(n+1) - 4 = 4n$

De vier trek ik ervan af omdat de hoekpunten van V_n alle twee keer voorkomen in $S_{n1} \cup S_{n2} \cup S_{n3} \cup S_{n4}$. $\square$