

Vrije Universiteit Amsterdam  
Opleiding Wiskunde - Scriptie bij het vak Presentatiecursus Wiskunde

# Stochastische Wandelingen en Elektrische Netwerken

Arno E. Weber

email: *aeweber♠cs.vu.nl*

Maart 2004

# Inhoudsopgave

<b>Inleiding</b>	<b>1</b>
<b>0. Elektrische schakelingen</b>	<b>2</b>
<b>1. Netwerken in één dimensie</b>	<b>4</b>
1.1 Een stochastische wandeling in één dimensie . . . . .	4
1.2 Een elektrische schakeling in serie . . . . .	6
1.3 Harmonische functies en de uniciteitsstelling . . . . .	7
<b>2. Netwerken in twee dimensies</b>	<b>10</b>
2.1 Een netwerk in het rooster . . . . .	10
<b>3. Algemene netwerken</b>	<b>15</b>
3.1 Inleiding en afspraken . . . . .	15
3.2 Probabilistische interpretatie van potentiaal . . . . .	17
3.3 Probabilistische interpretatie van stroom . . . . .	19
<b>Literatuurlijst</b>	<b>22</b>

# Inleiding

Deze scriptie vormt een onderdeel van het vak Presentatiecursus Wiskunde, dat wordt verzorgd voor derdejaars studenten Wiskunde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam. Omdat ik mij de laatste tijd ben gaan interesseren in het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening, heb ik besloten om over een onderwerp in dit gebied te schrijven. Via Ronald Meester kwam ik tot de keuze van het onderwerp 'stochastische wandelingen en elektrische netwerken'. Bij deze wil ik hem dan ook bedanken voor zijn hulp.

In deze scriptie bestuderen we stochastische wandelingen op grafen, en elektrische stromen door weerstandsnetwerken "corresponderend" met deze grafen. We zullen een paar opmerkelijke relaties ontdekken tussen deze twee, op het eerste gezicht verschillende, onderwerpen. Een praktisch gevolg is bijvoorbeeld dat men metingen kan verrichten in een elektrisch netwerk, om zodoende iets te weten te komen over de bijbehorende stochastische wandeling (bijvoorbeeld de waarde van een kans of verwachting). In hoofdstuk 1 beschouwen we een eenvoudig geval in één dimensie. Vervolgens behandelen we in hoofdstuk 2 een generalisatie in twee dimensies. Tot slot bekijken we in hoofdstuk 3 algemene grafen en netwerken, en behandelen we een paar uitbreidingen.

Bij de lezer veronderstel ik enige elementaire kennis van de kansrekening, alsmede enige ervaring met de theorie van stochastische wandelingen en Markov-ketens. Verder maak ik in dit verslag gebruik van de elementaire theorie van elektrische schakelingen en netwerken. Omdat dit wellicht niet bij iedere lezer bekend is, heb ik hoofdstuk 0 toegevoegd, waarin één en ander kort wordt uitgelegd.

Tot slot vermeld ik dat ik op 25 februari 2004 een presentatie in het studentencolloquium heb gehouden over een gedeelte van de inhoud van dit werkstuk. Samen met nog een andere korte presentatie vormen deze scriptie en de presentatie in het studentencolloquium bij elkaar de toetsing van de presentatiecursus. Al met al heb ik dit vak met veel plezier gevolgd en heb ik ook deze scriptie met veel plezier geschreven.

Amsterdam, 26 maart 2004

# Hoofdstuk 0

## Elektrische schakelingen

Om te beginnen behandelen we een stukje VWO natuurkunde, namelijk de theorie van *elektrische schakelingen*, waarvan we in dit verslag gebruik maken. We gaan uit van een gesloten elektrische schakeling (een stroomkring; ook wel een *elektrisch netwerk genoemd*), met als onderdelen één *spanningsbron* en een aantal (ohmse) *weerstand*en. Zie bijvoorbeeld de figuren 2, 4 en 6 in volgende hoofdstukken. De spanningsbron zorgt voor een *spanning* (potentiaalverschil) tussen beide polen, waardoor er een stroom door de stroomkring gaat lopen. Deze stroom bestaat uit geladen deeltjes (elektronen) die hun elektrische energie afgeven aan de weerstanden. Per afspraak loopt de stroom van de pluspool naar de minpool, al bewegen de elektronen in werkelijkheid in de omgekeerde richting. Bij dit proces spelen vier grootheden een rol, te weten: *potentiaal*, *spanning*, *stroom(sterkte)* en *weerstand*.

Als we de minpool van de bron met de aarde verbinden, is de potentiaal in de minpool per afspraak 0 volt (volt is de eenheid van potentiaal en van spanning). Is de spanningsbron in dit geval een batterij van  $v$  volt, dan heeft de pluspool een potentiaal van  $v$  volt. Is  $x$  een (knoop)punt in de schakeling, dan noteren we de potentiaal in  $x$  met  $v(x)$ . We beschouwen vaak de potentialen in de knooppunten van de schakeling en op de beide polen van de schakeling. Over een weerstand verbonden met de punten  $x$  en  $y$  staat dan een spanning van  $v(x) - v(y)$  volt. Is dit getal positief, dan loopt de stroom van  $x$  naar  $y$ ; is dit getal negatief, dan loopt de stroom van  $y$  naar  $x$ .

De stroomsterkte van de stroom, die door een weerstand tussen  $x$  en  $y$  loopt, noteren we met  $i_{xy}$ . In plaats van stroomsterkte spreken we ook wel kortweg van stroom. Dit is een maat voor de hoeveelheid lading dat per tijdseenheid passeert. De stroom wordt gewoonlijk gemeten in ampère. Het getal  $i_{xy}$  is positief als de stroom van  $x$  naar  $y$  loopt en negatief als dit andersom is. Er geldt dus dat  $i_{xy} = -i_{yx}$ . Daarnaast noemen we even de *wetten van Kirchhoff*. Deze zeggen onder andere dat de totale stroom die naar een punt  $x$  toeloopt, gelijk is aan de totale stroom die van  $x$  vandaan loopt. Met andere woorden: de netto stroom richting een punt  $x$  is 0. In formule:

$$\sum_y i_{xy} = 0,$$

waarbij we sommeren over alle punten  $y$  zodat  $x$  en  $y$  door een weerstand verbonden zijn. Voor een gegeven weerstand en bij een gegeven spanning over deze weerstand is de stroomsterkte sterk afhankelijk van de weerstand zelf. De *wet van Ohm* zegt daarover het volgende:

De stroomsterkte  $i_{xy}$  door een weerstand tussen  $x$  en  $y$  is recht evenredig met de spanning  $v(x) - v(y)$  over deze weerstand. In formule:

$$\frac{v(x) - v(y)}{i_{xy}} = \text{constant}.$$

We noemen deze constante de *weerstandswaarde* of kortweg *weerstand*, notatie  $R_{xy}$ . Dus:

$$R_{xy} = \frac{v(x) - v(y)}{i_{xy}}.$$

De eenheid van weerstand is dus volt per ampère, maar deze noemen we meestal ohm. Merk op dat het woord 'weerstand' in feite twee betekenissen heeft: enerzijds is het een element in het netwerk, en anderzijds een getal bepaald door de bovenstaande formule.

Tot slot merken we even op dat we de grootheden spanning, stroom en weerstands(waarde) zowel kunnen toekennen aan een weerstand in de schakeling, als aan de hele schakeling zelf. De spanning  $v$  is hierbij de bronspanning (in dit verslag kiezen we die bijna altijd gelijk aan 1 volt; alleen in het laatste hoofdstuk niet altijd). De stroom(sterkte)  $i$  van het netwerk is de totale stroom die via de pluspool het netwerk binnenstroomt (en is dus wegens de wetten van Kirchhoff gelijk aan de totale stroom die via de minpool het netwerk verlaat). Deze stroom is dus gelijk aan  $i = \sum_y i_{ay}$  als  $a$  de pluspool voorstelt en we sommeren over alle  $y$  zodat de punten  $a$  en  $y$  verbonden zijn door een weerstand. De weerstandswaarde van het hele netwerk definiëren we consistent met de wet van Ohm, dus als  $v/i$ . We noemen deze grootheid de *vervangingsweerstand* of *effectieve weerstand* van het netwerk, notatie:  $R_V$ . Er geldt dus:

$$R_V = \frac{v}{i}.$$

Over de theorie van dit soort elektrische netwerken valt nog veel meer te zeggen, maar voor onze doelen is het zojuist behandelde voldoende.

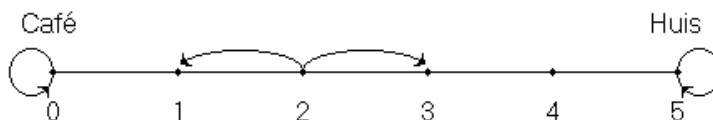
# Hoofdstuk 1

## Netwerken in één dimensie

In dit eerste hoofdstuk bekijken we een eenvoudige stochastische wandeling op een recht lijnstuk, en een elektrische schakeling van weerstanden in serie. Het hele verslag draait in feite om een relatie tussen stochastische wandelingen en elektrische schakelingen. Het doel van dit hoofdstuk is het bewijzen van deze relatie in dit speciale geval.

### 1.1 Een stochastische wandeling in één dimensie

Een voorbeeld van een eenvoudige stochastische wandeling in één dimensie is de zogeheten *dronkemanswandeling*. Beschouw een straat met  $N$  opvolgende (kruis)punten, genummerd  $0, 1, 2, \dots, N$ , zie figuur 1 voor  $N = 5$ . In het punt  $x$  bevindt zich een man die het volgende spelletje speelt: Hij werpt een zuivere munt; bij kruis loopt de man één punt naar rechts (dus naar  $x + 1$ ) en bij munt loopt de man één punt naar links (dus naar  $x - 1$ ). In het aangekomen punt doet hij hetzelfde. Dit gaat zo door totdat de man één der punten  $0$  of  $N$  bereikt. In  $N$  bevindt zich namelijk zijn huis en in  $0$  bevindt zich een café. Zodra de man één van deze punten bereikt heeft, blijft hij daar. De punten  $0$  en  $N$  worden daarom in de theorie van de stochastische wandelingen ook wel *absorberende toestanden* genoemd.



Figuur 1: Dronkemanswandeling,  $N = 5$

We zijn nu geïnteresseerd in de kans  $p(x)$  dat de man zijn huis bereikt vóórdat hij het café bereikt. Maar alvorens we hierop ingaan, geven we nog een andere interpretatie aan het getal  $p(x)$ .

Stel, twee spelers  $A$  en  $B$  doen een muntspelletje waarbij  $A$  aanvankelijk  $x$  euro bezit en  $A$  en  $B$  samen  $N$  euro bezitten (waardoor  $B$  uiteraard  $N - x$  euro bezit). Eén van beide spelers werpt een zuivere munt. Bij kruis wint  $A$  een euro van  $B$  en bij munt is het andersom. Vervolgens wordt er weer een munt geworpen waarbij weer één der spelers een euro van de tegenstander wint. Zo gaat het door totdat één van de spelers al het geld van de tegenstander heeft gewonnen (en zelf dus  $N$  euro bezit). Het getal  $p(x)$  is nu de kans dat  $A$  het spel wint, dus dat het kapitaal van  $A$  de waarde  $N$  euro eerder aanneemt dan de waarde  $0$  euro.

We zouden ons kunnen afvragen: wat is  $p(x)$ ? Het bepalen van de waarde hiervan is echter niet ons voornaamste doel. We willen namelijk ook een verband afleiden tussen dit soort stochastische wandelingen en *elektrische schakelingen* (of *netwerken*). Om dat doel te bereiken zullen we tot besluit van deze paragraaf enkele eigenschappen van  $p(x)$  afleiden.

PROPOSITIE:

De functie  $p(x)$  voor  $x \in \{0, 1, \dots, N\}$  voldoet aan de volgende eigenschappen:

- (a)  $p(0) = 0$ ,
- (b)  $p(N) = 1$ ,
- (c)  $p(x) = (1/2)p(x - 1) + (1/2)p(x + 1)$  voor  $x \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ .

BEWIJS:

Eigenschappen (a) en (b) volgen onmiddellijk uit onze conventie dat  $0$  en  $N$  absorberende toestanden zijn. Zodra de man één van deze punten bereikt, blijft hij daar; evenzo: het muntspelletje eindigt zodra één speler alle  $N$  euro's bezit.

Om (c) te bewijzen gebruiken we de volgende *conditioneringsregel* uit de kansrekening:

Als  $E$  een eventualiteit is, en  $F$  en  $G$  zijn eventualiteiten zodat precies één van beide gebeurt (dus zodat  $F$  en  $G$  een partitie vormen van de hele uitkomstenruimte), dan geldt:

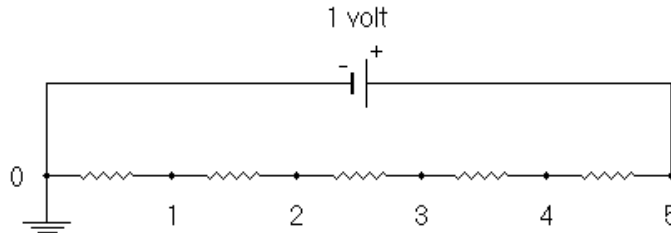
$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(E \text{ gegeven } F) + \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(E \text{ gegeven } G).$$

Zij in dit geval  $E$  de eventualiteit "de man komt thuis" ,  $F$  de eventualiteit "de eerste stap is naar links" en  $G$  de eventualiteit "de eerste stap is naar rechts" . Laat nu de man starten in  $x$ , dan:  $\mathbb{P}(E) = p(x)$ ,  $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(G) = 1/2$ ,  $\mathbb{P}(E \text{ gegeven } F) = p(x - 1)$  en  $\mathbb{P}(E \text{ gegeven } G) = p(x + 1)$ . Hiermee volgt (c).

□

## 1.2 Een elektrische schakeling in serie

We beschouwen nu de eenvoudige elektrische schakeling die te zien is in figuur 2. In deze schakeling staat er een spanning van 1 volt over  $N$  gelijke, in serie geschakelde weerstanden van waarde, zeg,  $R$  (de figuur is weer voor  $N = 5$ ). De punten  $0, 1, \dots, N$  in de schakeling bevinden zich tussen de weerstanden en op de polen van de spanningsbron.



Figuur 2: Serieschakeling,  $N = 5$

Voor  $x \in \{0, 1, \dots, N\}$  noteren we met  $v(x)$  de potentiaal in het punt  $x$ . We zijn nu geïnteresseerd in de waarde van  $v(x)$  en in het verband van deze functie met de in de vorige paragraaf gedefinieerde functie  $p(x)$ . Omdat het punt 0 geaard is, geldt in ieder geval  $p(0) = 0$  en  $p(N) = 1$ , zodat  $v(x)$  net als  $p(x)$  voldoet aan de eigenschappen (a) en (b) uit de vorige paragraaf. Dat de functie ook aan (c) voldoet is als volgt te bewijzen: Vanwege de wetten van Kirchhoff is de stroom die naar een punt  $x$  toe loopt gelijk aan de stroom die van  $x$  vandaan loopt. Zijn de punten  $x$  en  $y$  verbonden door een weerstand  $R$ , dan is de stroom  $i_{xy}$  die loopt van  $x$  naar  $y$  wegens de wet van Ohm gelijk aan

$$i_{xy} = \frac{v(x) - v(y)}{R}.$$

(Deze waarde is dus negatief als  $x < y$  en positief als  $x > y$ .)

Dus voor  $x \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$  geldt

$$i_{x+1,x} = i_{x,x-1}, \text{ waardoor } \frac{v(x+1) - v(x)}{R} + \frac{v(x-1) - v(x)}{R} = 0.$$

Als we beide leden van deze vergelijking met  $R$  vermenigvuldigen en uit het resultaat  $v(x)$  oplossen, krijgen we

$$v(x) = \frac{v(x-1) + v(x+1)}{2} = (1/2)v(x-1) + (1/2)v(x+1), \text{ voor } x = 1, 2, \dots, N-1.$$

Dus  $v(x)$  voldoet ook aan eigenschap (c) van de vorige paragraaf. Dit roept de vraag op: is  $p(x) = v(x)$ ? We merken eerst even op dat we in de vorige paragraaf een zeer eenvoudige



stochastische wandeling hebben beschouwd, en in deze paragraaf een zeer eenvoudige elektrische schakeling. We kunnen daardoor in dit speciale geval heel eenvoudig afleiden dat  $p(x) = v(x) = x/N$ , voor  $x \in \{0, 1, \dots, N\}$ . De functies  $p(x)$  en  $v(x)$  zijn dus inderdaad gelijk! Een bewijs hiervan gaat als volgt:

De functie  $p(x)$  voldoet zoals bekend aan de eigenschappen (a), (b) en (c). We kunnen hieruit het volgende stelsel vergelijkingen afleiden (een *recurrente betrekking*):

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p(x) = 2p(x-1) - p(x-2), \text{ voor } x \geq 2 \\ p(N) = 1 \end{cases}$$

Noem verder even  $p(1) =: a$ . Als we de eerste paar grootheden  $p(0), p(1), p(2), \dots$  uitrekenen in termen van  $a$ , ontstaat het vermoeden dat  $p(x) = xa$ . Dit blijkt inderdaad zo te zijn, immers, met inductie zien we dat

$$p(x) = 2p(x-1) - p(x-2) \stackrel{!}{=} 2(x-1)a - (x-2)a = xa.$$

Omdat ook  $p(N) = Na = 1$ , vinden we  $a = 1/N$ , en dus is  $p(x) = x/N$  voor  $x \in \{0, 1, \dots, N\}$  de unieke oplossing van het stelsel. Aangezien voor  $v(x)$  precies hetzelfde stelsel afgeleid kan worden (uiteraard met  $p$  vervangen door  $v$ ), moet ook wel  $v(x) = x/N$  voor  $x \in \{0, 1, \dots, N\}$ .

We hebben dus in dit speciale geval aangetoond dat  $p(x) = v(x)$ . We willen echter ook in algemenere gevallen aantonen dat  $p(x) = v(x)$ . Omdat dit probleem in zulke gevallen niet zo eenvoudig is op te lossen als wat we zojuist gedaan hebben, zullen we in de volgende paragraaf het voorgaande resultaat op een andere manier bewijzen. De methode die we dan zullen zien werkt ook in algemenere gevallen.

### 1.3 Harmonische functies en de uniciteitsstelling

Beschouw de stochastische wandeling en de elektrische schakeling uit de voorgaande twee paragrafen. Noem  $S := \{0, 1, \dots, N\}$ . We noemen de punten in  $D := \{1, 2, \dots, N-1\}$  de *inwendige punten* van  $S$  en die in  $B := \{0, N\}$  de *randpunten* van  $S$ .

DEFINITIE:

Een functie  $f(x)$  gedefinieerd op  $S$  heet *harmonisch* als voor  $x \in D$ :

$$f(x) = \frac{f(x-1) + f(x+1)}{2}.$$

Zoals we hebben gezien zijn  $p(x)$  en  $v(x)$  beide harmonische functies op  $S$  met bovendien dezelfde waarden op de rand:  $p(0) = v(0) = 0$  en  $p(N) = v(N) = 1$ . De aanstonds te bewijzen *uniciteitsstelling* zegt dat er geen twee harmonische functies kunnen bestaan met dezelfde randwaarden, waardoor wel moet gelden:  $p(x) = v(x)$ . We stellen dus als doel deze unicitystelling te bewijzen en gebruiken daartoe een lemmaatje, genaamd het *maximumprincipe*.

LEMMA: (*Maximumprincipe*)

Een harmonische functie  $f(x)$  gedefinieerd op  $S$  neemt zijn maximum  $M$  en zijn minimum  $m$  aan op de rand  $B$ .

BEWIJS:

Zij  $M$  de hoogste waarde die  $f$  aanneemt. Stel dat  $f(x) = M$  voor een  $x \in D$ . Dan moet ook  $f(x-1) = M$  en  $f(x+1) = M$ , aangezien  $f(x)$  het gemiddelde is van  $f(x-1)$  en  $f(x+1)$ . Is  $x-1$  nog steeds een inwendig punt, dan volgt met hetzelfde argument dat  $f(x-2) = M$ . Op deze manier kunnen we doorgaan en vinden we uiteindelijk dat  $f(0) = M$ , dus  $M$  wordt op de rand aangenomen. Het bewijs voor  $m$  gaat uiteraard analoog.

□

STELLING: (*Unicitystelling*)

Zij  $f(x)$  en  $g(x)$  harmonische functies op  $S$  zodat  $f(x) = g(x)$  op  $B$ , dan geldt:  $f(x) = g(x)$  voor alle  $x \in S$ .

BEWIJS:

Definieer  $h(x) := f(x) - g(x)$ . Dan voor iedere  $x \in D$ :

$$\frac{h(x-1) + h(x+1)}{2} = \frac{f(x-1) + f(x+1)}{2} - \frac{g(x-1) + g(x+1)}{2} = f(x) - g(x) = h(x),$$

dus  $h$  is harmonisch. Omdat  $f$  en  $g$  dezelfde waarden aannemen op de rand, geldt:  $h(x) = 0$  voor  $x \in B$ . En dus, wegens het maximumprincipe, geldt dat het maximum en minimum van  $h$  beide gelijk zijn aan 0. Dus  $h(x) = 0$  voor alle  $x$ , en dus  $f(x) = g(x)$  voor alle  $x$ .

□

We hebben dus aangetoond dat  $p(x) = v(x)$ . De unicitystelling geeft nu ook een alternatieve manier om het voorschrift van  $f(x)$  en  $v(x)$  te bepalen. Neem als probeerfunctie de eenvoudige lineaire functie  $f(x) := x/N$  voor  $x \in S$ . Dan  $f(0) = 0$ ,  $f(N) = 1$ , en

$$\frac{f(x-1) + f(x+1)}{2} = \frac{x-1 + x+1}{2N} = \frac{x}{N} = f(x).$$

Dus  $f$  is harmonisch en heeft dezelfde randwaarden als  $p(x)$  en  $v(x)$ . De uniciteitsstelling zegt nu:  $p(x) = v(x) = f(x) = x/N$ .

Tot slot nog een andere toepassing van het maximumprincipe. We kunnen als volgt bewijzen dat de wandelaar ooit zijn huis of het café bereikt. Kies een startpunt  $x \in D$ . Zij  $h(x)$  de kans dat de wandelaar *nooit* de rand  $B = \{0, N\}$  bereikt. Dan geldt weer vanwege de in paragraaf 1.1 genoemde *conditioneringsregel* uit de kansrekening, dat:

$$h(x) = (1/2)h(x-1) + (1/2)h(x+1),$$

dus  $h$  is harmonisch. Verder:  $h(0) = h(N) = 0$ ; dus, wegens het maximumprincipe:  $h(x) = 0$  voor alle  $x$ . Dus de kans dat de wandelaar *ooit* de rand  $B$  bereikt moet wel 1 zijn.

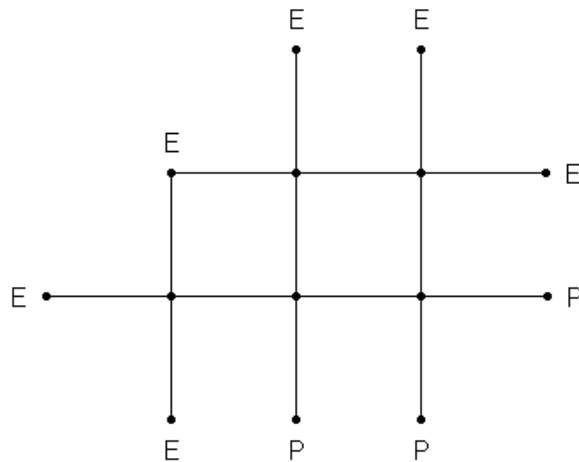
# Hoofstuk 2

## Netwerken in twee dimensies

In dit hoofdstuk geven we een eerste generalisatie van de theorie uit hoofdstuk 1.

### 2.1 Een netwerk in het rooster

We bekijken een wandeling in een netwerk als deel van een *rooster*, waarbij we de verzameling (knoop)punten opvatten als deel van  $\mathbb{Z}^2$ . Figuur 3 illustreert zo'n netwerk.

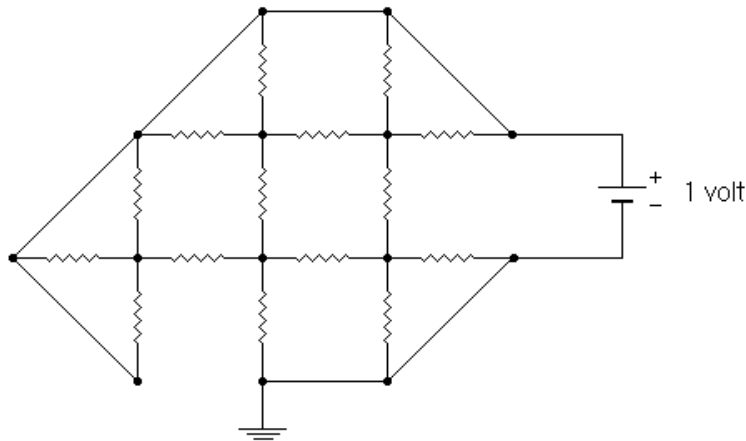


Figuur 3: Deel van het rooster

De punten gemerkt met een  $E$  zijn ontsnappingsroutes en in de punten gemerkt met een  $P$  bevinden zich politiemannen. We zijn geïnteresseerd in de kans  $p(x)$  dat een wandelaar, gestart in een punt  $x$  een ontsnappingsroute bereikt voordat hij een politiemann bereikt. De wandelaar loopt van  $x = (a, b)$  naar elk van de vier *buurpunten*  $(a + 1, b)$ ,  $(a - 1, b)$ ,  $(a, b + 1)$ ,  $(a, b - 1)$  met kans  $1/4$ . Aangekomen in een nieuw binnen gelegen punt doet hij

hetzelfde. Zodra de wandelaar een randpunt (d.w.z. een punt  $E$  of  $P$ ) bereikt, blijft hij daar.

Het corresponderende elektrische netwerk is te zien in figuur 4. De punten  $P$  zijn geaard en de punten  $E$  zijn verbonden met de pluspool van een batterij van 1 volt. De punten zijn onderling verbonden door identieke weerstanden van waarde  $R$ . We zijn op zoek naar de potentiaal  $v(x)$  in een punt  $x$ .



Figuur 4: Netwerk

Om te bewijzen dat  $p(x) = v(x)$  zullen we aanstonds het begrip *harmonische functie* definiëren voor roosterpunten in het vlak. Eerst maken we enkele afspraken over het soort netwerk dat we in deze paragraaf beschouwen. Zij  $S = D \cup B$  een eindige deelverzameling van  $\mathbb{Z}^2$  zodat:

- (a)  $D$  en  $B$  zijn disjunct,
- (b) ieder punt in  $D$  heeft vier buurpunten in  $S$ ,
- (c) ieder punt in  $B$  heeft ten minste één van zijn buurpunten in  $D$ , en
- (d)  $S$  is *samenhangend* in de zin dat voor ieder koppel punten  $x, y \in S$  er een rij punten  $x_1, \dots, x_n$  in  $D$  bestaat zodat  $x, x_1, \dots, x_n, y$  een pad vormt van  $x$  naar  $y$ .

We noemen de punten in  $D$  de *inwendige punten* van  $S$  en die in  $B$  de *randpunten* van  $S$ . In ons voorbeeld wordt  $B$  gevormd door de punten  $P$  en  $E$ , en  $D$  door de overige punten.

**DEFINITIE:**

Een functie  $f$  gedefinieerd op  $S$  heet *harmonisch* als voor iedere punt  $(a, b) \in D$  geldt:

$$f(a, b) = \frac{f(a + 1, b) + f(a - 1, b) + f(a, b + 1) + f(a, b - 1)}{4}.$$

Om te bewijzen dat  $p(x)$  harmonisch is gebruiken we een uitbreiding van de *condi-*

*tioneringsregel* uit paragraaf 1.1 voor vier partitionerende eventualiteiten:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(E \text{ gegeven } F) + \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(E \text{ gegeven } G) + \mathbb{P}(H)\mathbb{P}(E \text{ gegeven } H) + \mathbb{P}(K)\mathbb{P}(E \text{ gegeven } K),$$

als  $F, G, H$  en  $K$  een partitie vormen van de hele uitkomstenruimte. Het gevraagde volgt hier direct uit door te definiëren:

$$\begin{aligned} E &:= \{\text{"De wandelaar bereikt een ontsnappingsroute"}\}, \\ F &:= \{\text{"De eerste stap is richting oost"}\}, \\ G &:= \{\text{"De eerste stap is richting west"}\}, \\ H &:= \{\text{"De eerste stap is richting noord"}\} \text{ en} \\ K &:= \{\text{"De eerste stap is richting zuid"}\}. \end{aligned}$$

Dat  $v(x)$  harmonisch is volgt weer uit de wetten van Kirchhoff en de wet van Ohm. De netto stroom die richting  $x = (a, b)$  loopt is gelijk aan

$$\frac{v(a+1, b) - v(a, b)}{R} + \frac{v(a-1, b) - v(a, b)}{R} + \frac{v(a, b+1) - v(a, b)}{R} + \frac{v(a, b-1) - v(a, b)}{R} = 0.$$

Deze vergelijking vermenigvuldigen met  $R$  en uit het resultaat  $v(a, b)$  oplossen geeft:

$$v(a, b) = \frac{v(a+1, b) + v(a-1, b) + v(a, b+1) + v(a, b-1)}{4}.$$

Dus  $p(x)$  en  $v(x)$  zijn beide harmonische functies met bovendien dezelfde randwaarden. Om hieruit te bewijzen dat zij gelijk zijn, moeten we de *uniciteitsstelling* uitbreiden naar twee dimensies.

Allereerst bewijzen we een analogon van het *maximumprincipe*. Zij  $M$  het maximum van  $f$  en stel dat  $f(y) = M$  voor een inwendig punt  $y$ . Daar  $f(y)$  het gemiddelde is van de waarden van  $f$  in de vier buurpunten van  $y$ , moeten deze vier waarden ook alle gelijk zijn aan  $M$ . Door (bijvoorbeeld) richting het zuiden te werken en dit argument bij iedere stap te herhalen, vinden we uiteindelijk een randpunt  $z$  waarvoor  $f(z) = M$ . Dus een harmonische functie neemt zijn maximum (en analoog ook zijn minimum) aan op de rand  $B$ . Dit is het maximumprincipe. Nu volgt volstrekt analoog aan het bewijs in paragraaf 1.3 de uniciteitsstelling.

STELLING: (*Uniciteitsstelling in twee dimensies*)

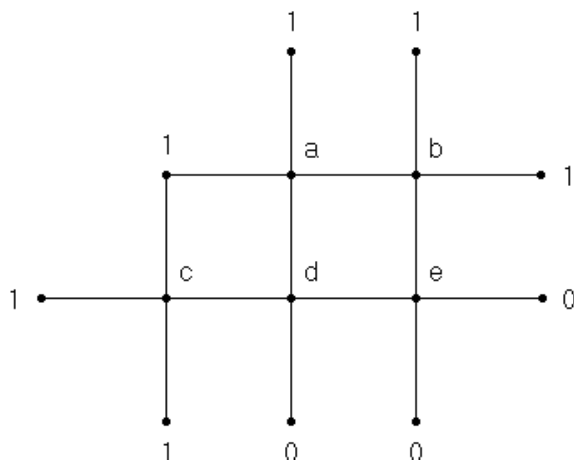
Zij  $f(x)$  en  $g(x)$  harmonische functies op  $S$  zodat  $f(x) = g(x)$  op  $B$ , dan geldt:  $f(x) = g(x)$  voor alle  $x \in S$ .

BEWIJS:

Het verschil  $h$  van twee harmonische functies  $f$  en  $g$  is weer harmonisch. Omdat  $f$  en  $g$  dezelfde waarden aannemen op  $B$ , geldt:  $h(x) = 0$  voor  $x \in B$ . En dus, wegens het maximumprincipe, zijn het maximum en minimum van  $h$  beide gelijk aan 0. Dus  $h(x) = 0$  voor alle  $x$ , en dus  $f(x) = g(x)$  voor alle  $x$ .

□

Het enige waar we in deze generalisatie nog niet naar gekeken hebben is bepaling van de waarde van  $p(x)$  en  $v(x)$ . Voor punten  $P$  is deze waarde uiteraard 0 en voor punten  $E$  uiteraard 1. De waarden in inwendige punten kunnen gevonden worden door het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen. We werken dit voor het voorbeeld waarmee we begonnen waren, even uit. In figuur 5 zijn de inwendige punten gelabeld  $a, b, \dots, e$ .



Figuur 5: Netwerk

Als we de variabelen  $p(a), \dots, p(e)$  (of  $v(a), \dots, v(e)$ ) schrijven als  $x_a, \dots, x_e$ , krijgen we het volgende stelsel:

$$\begin{aligned} x_a &= \frac{x_b + x_d + 2}{4} \\ x_b &= \frac{x_a + x_e + 2}{4} \\ x_c &= \frac{x_d + 3}{4} \\ x_d &= \frac{x_a + x_c + x_e}{4} \\ x_e &= \frac{x_b + x_d}{4}. \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen volgen uit het harmonisch zijn van  $p(x)$  en  $v(x)$  en uit de randwaarden van  $p(x)$  en  $v(x)$ . We kunnen dit stelsel herschrijven in matrixvorm als

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 0 & -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We weten dat dit stelsel een unieke oplossing heeft. Met de hand of computer kunnen we die uitrekenen, en vinden:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \\ x_d \\ x_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,823 \\ 0,787 \\ 0,876 \\ 0,506 \\ 0,323 \end{pmatrix}.$$

Deze vector legt dus de waarden van  $p(x)$  en  $v(x)$  vast voor  $x = a, \dots, e$ . Er bestaan ook methoden om de oplossing te benaderen, maar daar zullen we niet op in gaan.



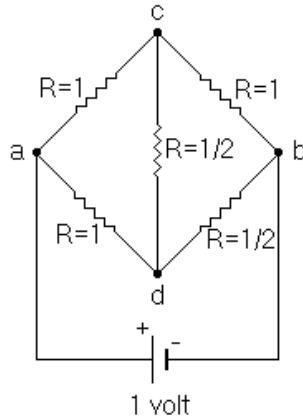
# Hoofstuk 3

## Algemeneren netwerken

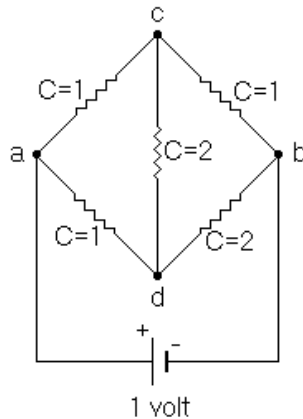
In de laatste drie paragrafen van dit verslag bespreken we een tweede generalisatie van de netwerktheorie uit hoofdstuk 1. Anders dan in het voorafgaande zullen we beginnen met elektrische weerstandsnetwerken. Vervolgens zullen we voor de betrokken grootheden (weerstand, potentiaal, stroom) een probabilistische interpretatie afleiden.

### 3.1 Inleiding en afspraken

Een *graaf*  $G$  is een eindige verzameling van *punten* waarbij sommige paren van punten met elkaar verbonden zijn door *lijnen*. De graaf  $G$  noemen we *samenhangend* indien er tussen ieder tweetal punten van  $G$  een pad bestaat langs de lijnen van  $G$ . Zij verder gegeven een samenhangende graaf  $G$ . We gaan er vanuit dat  $G$  geen lussen of meervoudige lijnen bevat. Aan iedere lijn  $xy$  kennen we een weerstand  $R_{xy}$  toe, zie voor een voorbeeld figuur 6. Het *geleidingsvermogen*  $C_{xy}$  van een lijn  $xy$  is gedefinieerd als  $C_{xy} := 1/R_{xy}$ , zie voor ons voorbeeld figuur 7. (In de figuren 6 en 7 hebben we de spanningsbron alvast aangesloten; hierover verderop meer.)



Figuur 6: Weerstandsnetwerk



Figuur 7: Geleidingsvermogens

We definiëren een *stochastische wandeling* op  $G$  als zijnde een *Markov-keten* met *overgangsmatrix*  $\mathcal{P}$  gegeven door  $\mathcal{P} := (P_{xy})_{x,y}$ , met *overgangskansen*

$$P_{xy} := \frac{C_{xy}}{C_x},$$

waarbij  $C_x := \sum_y C_{xy}$ . (En  $P_{xy} = 0$  als  $xy$  geen lijn is in  $G$ .) In ons voorbeeld is  $C_a = 2$ ,  $C_b = 3$ ,  $C_c = 4$ ,  $C_d = 5$ , waardoor de overgangsmatrix voor de corresponderende keten gegeven is door

$$\mathcal{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Merk op dat de rijssommen van de matrix alle 1 zijn, zodat we inderdaad met een Markov-matrix van doen hebben.

We hebben dus bij deze generalisatie afgeschaft dat alle weerstanden gelijk zijn, en hebben gezien dat de overganskansen bij een gegeven punt hierdoor ook verschillend kunnen zijn. Aangezien we op de graaf  $G$  een Markov-keten hebben vastgelegd, noemen we de punten van de graaf, net als in de theorie van de Markov-ketens, ook wel *toestanden*, en de verzameling toestanden de *toestandsruimte*.

Tot slot merken we op dat Markov-ketens corresponderend met elektrische netwerken voldoen aan de vergelijking  $C_x P_{xy} = C_y P_{yx}$ . Immers

$$C_x P_{xy} = C_x \frac{C_{xy}}{C_x} = C_{xy} = C_{yx} = C_y \frac{C_{yx}}{C_y} = C_y P_{yx}.$$

We zullen dit in paragraaf 3.3 een keer gebruiken.

## 3.2 Probabilistische interpretatie van potentiaal

We gaan weer uit van een netwerk van weerstanden toegekend aan de lijnen van een samenhangende graaf. We verbinden twee punten  $a$  en  $b$  met een 1 volt batterij zodat de potentiaal in deze punten gegeven wordt door  $v(a) = 1$  en  $v(b) = 0$ , zie eventueel de figuren 6 en 7. In de komende twee paragrafen bekijken we de potentialen  $v(x)$  en de stromen  $i_{xy}$  voor punten  $x$  en  $y$ , en zullen een probabilistische interpretatie toekennen aan deze grootheden. We beginnen met de potentiaal. Dit gaat weer analoog aan onze vorige modellen.

Wegens de wet van Ohm hebben we de volgende gelijkheid:

$$i_{xy} = \frac{v(x) - v(y)}{R_{xy}} = (v(x) - v(y))C_{xy}.$$

Vanwege de wetten van Kirchhoff is de netto stroom die richting een punt (ongelijk aan  $a$  of  $b$ ) loopt 0. Dat wil zeggen: voor  $x \neq a, b$ :

$$\sum_y i_{xy} = 0, \text{ ofwel } \sum_y (v(x) - v(y))C_{xy} = 0, \text{ ofwel } v(x) \sum_y C_{xy} = \sum_y C_{xy}v(y).$$

Dus de potentialen voldoen aan

$$v(x) = \sum_y \frac{C_{xy}}{C_x} v(y) = \sum_y P_{xy} v(y),$$

voor  $x \neq a, b$ . Dit wordt onze nieuwe betekenis van het begrip *harmonische functie*. De potentiaal  $v(x)$  is dus harmonisch in alle punten  $x \neq a, b$ .

Zij  $h(x)$  de kans dat, bij start in  $x$ , toestand  $a$  eerder bereikt wordt dan toestand  $b$ . Dan is  $h(x)$  ook harmonisch in punten  $x \neq a, b$ . Dit volgt uiteraard weer uit een variant op de *conditioneringsregel* uit paragraaf 1.1. Verder geldt:  $v(a) = h(a) = 1$  en  $v(b) = h(b) = 0$ . Hierdoor kunnen we weer analoog aan paragraaf 1.3 en 2.1 bewijzen dat  $v(x) = h(x)$  voor alle toestanden  $x$ .

We beginnen maar weer met het maximumprincipe. De bewering is dat voor een harmonische functie  $f(x)$  op de toestandruimte van de keten, het maximum en het minimum worden aangenomen op de verzameling  $\{a, b\}$ . Welnu, zij  $M$  het maximum van  $f(x)$  en stel dat  $f(x) = M$  voor een  $x \neq a, b$ . Nu geldt dat  $M$  ook in alle buurpunten van  $x$  wordt aangenomen. Immers, stel dat er een buurpunt  $z$  van  $x$  is zodat  $f(z) < M$ , dan

$$M = \sum_y P_{xy} f(y) < \sum_y P_{xy} M = M \sum_y P_{xy} = M,$$

een onmogelijkheid dus! Nu kunnen we met inductie wel voor elkaar krijgen dat  $M$  ook wordt aangenomen op  $\{a, b\}$ . Het bewijs voor het minimum  $m$  gaat weer analoog. Nu kunnen we de uitbreiding op de uniciteitsstelling bewijzen:

STELLING: (*Uniciteitsstelling voor algemene netwerken*)

Zij  $f(x)$  en  $g(x)$  harmonische functies op de toestandruimte zodat  $f(x) = g(x)$  voor  $x \neq a, b$ , dan geldt:  $f(x) = g(x)$  voor alle  $x$ .

BEWIJS:

Het verschil van twee harmonisch functies is weer harmonisch. Immers:

$$\sum_y P_{xy} (f(y) - g(y)) = \sum_y P_{xy} f(y) - \sum_y P_{xy} g(y) = f(x) - g(x).$$

Omdat  $f(x)$  en  $g(x)$  dezelfde waarden aannemen op  $\{a, b\}$ , is het verschil 0 op deze verzameling. Wegens het maximumprincipe zijn het maximum en het minimum van de verschil-functie beide gelijk aan 0. Dus is het verschil overal 0, en dus is  $f(x) = g(x)$  voor alle  $x$ .

□

We hebben dus het volgende gevonden:

#### INTERPRETATIE VAN POTENTIALAAL:

Als er een spanning van 1 volt over de punten  $a$  en  $b$  staat, zodat  $v(a) = 1$  en  $v(b) = 0$ , dan is de potentiaal  $v(x)$  in ieder punt  $x$  gelijk aan de kans  $h(x)$  dat de wandelaar, bij start in  $x$ , het punt  $a$  eerder bereikt dan  $b$ .

Een aardig gevolg is, dat men (de numerieke waarde van) een kans  $h(x)$  in een punt  $x$  in één of andere keten kan bepalen, door in een corresponderend elektrisch netwerk met een voltmeter het getal  $v(x)$  te meten. Uiteraard moet het dan wel gaan om een keten die correspondeert met een elektrisch netwerk.

We hebben hierbij (zoals tot nu tot overal in dit verslag) aangenomen dat zich tussen  $a$  en  $b$  een spanningsbron bevindt van 1 volt. We hadden echter ook uit kunnen gaan van een willekeurige spanning  $v(a)$  tussen  $a$  en  $b$ . In dat geval worden de grootheden  $v(x)$  en  $h(x)$  opgeblazen met een factor  $v(a)$ . We zouden  $h(x)$  dan kunnen interpreteren als de verwachte winst in een spel waarbij de speler start in  $x$  en een bedrag  $v(a)$  uitbetaald krijgt als  $a$  eerder bereikt wordt dan  $b$ , en 0 anders.

### 3.3 Probabilistische interpretatie van stroom

In deze laatste paragraaf leiden we een probabilistische interpretatie van de stroom af. Laten we om te beginnen eens kijken wat er in een elektrisch netwerk, voorzien van een spanningsbron (aangesloten op de punten  $a$  en  $b$ ; nu niet per afspraak van 1 volt), gebeurt. We stellen ons voor dat er positief geladen deeltjes via de pluspool  $a$  het netwerk binnenstromen, vervolgens wat rondwandelen van punt tot punt, en uiteindelijk via de minpool  $b$  het netwerk weer verlaten. (Nogmaals, in werkelijkheid zijn het juist negatief geladen deeltjes die door het netwerk bewegen van  $b$  naar  $a$ , maar in de netwerktheorie is dit nu eenmaal niet de afspraak.) Om de stroom  $i_{xy}$  door de weerstand  $R_{xy}$  langs de lijn  $xy$  te bepalen, stellen we ons voor dat een deeltje verschillende keren langs lijn  $xy$  wandelt - zowel van  $x$  naar  $y$ , als van  $y$  naar  $x$  - voordat de minpool  $b$  bereikt wordt. We beweren nu dat de stroom  $i_{xy}$  evenredig is met het verwachte netto aantal wandelingen langs de lijn van  $x$  naar  $y$ , waarbij een wandeling van  $y$  naar  $x$  als negatief wordt gerekend. We zullen zien waarom deze bewering klopt.

Stel, een wandelaar start in  $a$  en blijft wandelen totdat hij  $b$  bereikt. Merk op dat als hij terugkeert in  $a$  voordat hij  $b$  bereikt heeft, hij door blijft gaan met wandelen (dit in tegenstelling tot alle tot dusver beschouwde wandelingen). Zij  $u(x)$  het verwachte aantal bezoeken aan  $x$  voordat  $b$  bereikt wordt. Dan geldt:  $u(b) = 0$  en voor  $x \neq a, b$ :

$$u(x) = \sum_y u(y)P_{yx}.$$

Deze laatste vergelijking geldt omdat voor  $x \neq a, b$ , de wandelaar bij ieder bezoek aan  $x$  uit één of andere  $y$  vandaan komt. We hebben gezien dat  $C_x P_{xy} = C_y P_{yx}$ . Hieruit volgt

$$u(x) = \sum_y u(y) \frac{P_{xy} C_x}{C_y}, \text{ ofwel: } \frac{u(x)}{C_x} = \sum_y P_{xy} \frac{u(y)}{C_y}.$$

Dit betekent dat de functie  $v(x) := u(x)/C_x$  harmonisch is voor  $x \neq a, b$ . Ook geldt dat  $v(b) = 0$  en  $v(a) = u(a)/C_a$ . Dit impliceert wegens de uniciteitsstelling uit de vorige paragraaf, dat  $v(x)$  gelijk is aan de potentiaal in  $x$ , wanneer de spanningsbron tussen  $a$  en  $b$  voor een potentiaal van  $u(a)/C_a$  in  $a$  zorgt, en een potentiaal van 0 in  $b$ . We nemen dit laatste vanaf nu aan.

We zijn geïnteresseerd in de stroom  $i_{xy}$  van  $x$  naar  $y$ . Deze grootte wordt gegeven door

$$i_{xy} = (v(x) - v(y))C_{xy} = \left( \frac{u(x)}{C_x} - \frac{u(y)}{C_y} \right) C_{xy} = \frac{u(x)C_{xy}}{C_x} - \frac{u(y)C_{yx}}{C_y} = u(x)P_{xy} - u(y)P_{yx}.$$

Merk nu op dat  $u(x)P_{xy}$  precies het verwachte aantal maal is, dat onze wandelaar van  $x$  naar  $y$  beweegt. Evenzo is  $u(y)P_{yx}$  het verwachte aantal wandelingen van  $y$  naar  $x$ . En dus is de stroom  $i_{xy}$  is het verwachte netto aantal maal dat de wandelaar van  $x$  naar  $y$  beweegt.

Merk op dat de stromen  $i_{xy}$  i.h.a. niet gelijk zijn aan die van het oorspronkelijke netwerkprobleem, waar we uitgegaan waren van een 1-volt batterij, maar ze zijn wel evenredig met de oorspronkelijke stromen. We willen nu de evenredigheidsconstante die hierbij hoort bepalen. Merk daartoe op dat de totale stroom die het netwerk binnenloopt in  $a$  (en het netwerk weer verlaat in  $b$ ) gelijk is aan 1. In formule:

$$\sum_y i_{ay} = 1.$$

Dit kunnen we als volgt afleiden. Uit onze zojuist afgeleide probabilistische interpretatie van  $i_{xy}$ , weten we dat  $i_{ay}$  het verwachte verschil is tussen het aantal keer dat de wandelaar  $a$  verlaat richting  $y$  en het aantal keer dat hij  $a$  bereikt via  $y$ . Met behulp van de somregel voor verwachtingen geldt nu dat de som uit bovenstaande vergelijking gelijk is aan het verwachte verschil tussen het aantal keer dat  $a$  verlaten wordt en het aantal keer dat  $a$  bereikt wordt. We weten dat  $a$  altijd één keer meer verlaten wordt dan bereikt, en dus is de bovenstaande som 1.

We hebben in dit geval dus een totale stroom van 1 in het netwerk. In het oorspronkelijke netwerk kunnen we deze eenheidsstroom met bijbehorende stromen over de weerstanden verkrijgen door deze stromen de delen door de totale stroom

$$\sum_y i_{ay},$$

die via  $a$  het netwerk binnenstroomt. De evenredigheidsconstante die we zochten is dus de multiplicatieve inverse van deze som:

$$\frac{1}{\sum_y i_{ay}}.$$

Omdat we in het oorspronkelijke netwerk een bronspanning van 1 volt hebben aangenomen, zien we dat dit getal gelijk is aan de *vervangingsweerstand*  $R_V$  van dit netwerk. Alles bij elkaar hebben we het volgende gevonden:

#### INTERPRETATIE VAN STROOM:

Als de totale stroom over het netwerk 1 is, dan is de stroom  $i_{xy}$  langs een lijn  $xy$  (ingeval van positieve waarde) gelijk aan het verwachte netto aantal maal dat de wandelaar, bij start in  $a$  en doorwandeland tot dat  $b$  bereikt wordt, van  $x$  naar  $y$  beweegt. Deze stromen zijn evenredig met de stromen die we krijgen als we de bronspanning over  $a$  en  $b$  gelijk aan 1 volt kiezen. De evenredigheidsconstante hierbij is de vervangingsweerstand van het netwerk.

Een aardig gevolg is, dat men (de numerieke waarde van) een dergelijke verwachting in één of andere keten kan bepalen, door in een corresponderend netwerk met een stroommeter het getal  $i_{xy}$  te meten. Ingeval de bronspanning gelijk aan 1 volt is gekozen, moet de gevonden waarde nog vermenigvuldigd worden met de vervangingsweerstand. Het resultaat is de gevraagde verwachting.

Concluderend hebben we in dit werkstuk gezien dat er een aardig verband bestaat tussen stochastische wandelingen op grafen en elektrische netwerken. Deze theorie kan nog veel verder uitgebreid worden. Onder meer naar oneindige netwerken/ketens, en met beschouwingen van de elektrische energie die aan een weerstand wordt afgegeven. We sluiten af met een verwijzing naar [1] uit de literatuurlijst, het boek van Doyle en Snell, waarin deze onderwerpen aan bod komen.

# Literatuurlijst

[1] Doyle, Peter G. en Snell, J. Laurie, *Random Walks and Electric Networks*, The Mathematical Association of America, 1984.

[2] Harn, K. van en Holewijn, P.J., *Markov-ketens in Discrete Tijd*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1991.

[3] Middellink, J.W., *Systematische Natuurkunde voor bovenbouw VWO C1*, Van Walraven, Apeldoorn, 1991.